LOGICA Y TEORIA DE LA CIENCIA

LOGICA INDUCTIVA Y PROBABILIDAD

Maurice Boudot

PARANINFO S.A.

LOGICA INDUCTIVA Y PROBABILIDAD

Maurice Boudot

LOGICA INDUCTIVA Y PROBABILIDAD

1979

Colección
LOGICA Y TEORIA DE LA CIENCIA

PARANINFO S.A.
MADRID

Traducido por
LUCILA GONZALEZ PAZOS

Revisión de
PASCUAL MARTINEZ FREIRE

© Libraire Armand Colin, París (Francia)
© de la edición española, PARANINFO, S. A. Madrid (España)
© de la traducción, PARANINFO, S. A. Madrid (España)

Título original francés:
LOGIQUE INDUCTIVE ET PROBABILITE

Reservados los derechos de edición,
reproducción o adaptación para todos
los países de lengua española

IMPRESO EN ESPAÑA
PRINTED IN SPAIN

ISBN: 84-283-0989-2
Depósito Legal: M. 34.675-1978

PARANINFO S.A. Magallanes, 25 - MADRID (15) (3-2720)

Gráficas Lormo - Isabel Méndez, 15 - Madrid 18.

INDICE

INTRODUCCION 11

Primera parte

LA IDEA DE UNA LOGICA INDUCTIVA PROBABILITARIA

CAPITULO I. **La epistemología formal y el concepto de lógica inductiva** . . . 29

CAPITULO II. **Miseria de la lógica inductiva clásica** 37

1. La prueba inductiva y las técnicas de eliminación (37).–2. Las reglas inductivas (47).–3. La noción de confirmación (54).

CAPITULO III. **Las teorías de la inferencia estadística** 62

1. El problema de la inferencia estadística: las soluciones bayesianas y el concepto de verosimilitud (65).–2. De los tests de hipótesis a la teoría de la decisión (74).–3. La inferencia estadística y la lógica de la inducción (87).

CAPITULO IV. **Las tareas de la lógica inductiva probabilitaria** 96

1. Las condiciones formales de adecuación y la extensión mínima de una lógica inductiva probabilitaria (100).–2. Evidencia intuitiva y análisis formal en teoría de la inducción (107).–3. Análisis formal y justificación de la inducción (111).

Segunda parte

INDUCCION, PROBABILIDADES Y FRECUENCIAS SEGUN REICHENBACH

CAPITULO V. **Frecuencias y probabilidades** 119

1. Las dificultades de la teoría de la probabilidad de **Laplace** (121). 2. La teoría frecuencial de la probabilidad (125).–3. Los límites de la teoría del colectivo (129).

CAPITULO VI. **La inducción y su progreso según Reichenbach** 135

1. Los fundamentos lógicos de la probabilidad (136).–2. El problema de la aplicación y la regla de inducción (143).–3. La lógica probabilitaria y el progreso de la inducción (147).–4. La probabilidad de las hipótesis científicas (153).

CAPITULO VII. **La concepción frecuencial de la probabilidad y la lógica inductiva (examen crítico del sistema de Reichenbach)** 159

1. La definición de la probabilidad y sus incertezas (160).–2. El progreso de la inducción y la teoría matemática de probabilidades (164). 3. Las hipótesis teóricas y la concepción frecuencial de la probabilidad (170).

CAPITULO VIII. **La justificación de la regla de inducción** 175

1. Inducción y predicción (175).-2. Justificación de la inducción y lógica probabilitaria (181).

Tercera parte

LAS TEORIAS DEL GRADO DE CONFIRMACION

CAPITULO IX. **Significación y uso del concepto metalógico de probabilidad**. 191

1. Del grado de creencia al grado de confirmación (192).–2. La coherencia de las opiniones y la axiomática de la probabilidad (199).

CAPITULO X. **Los teoremas de la confirmación** 205

1. Los teoremas de la confirmación: las condiciones de su demostración (206).–2. La teoría Keynesiana: examen crítico (210).–3. Los principios de una teoría de la confirmación (216).

CAPITULO XI. **El sistema de Carnap** 222

1. Los fundamentos lógicos de la probabilidad (225).–2. La definición del grado de confirmación (230).–3. El método inductivo c^*. (239).

CAPITULO XII. **Las teorías de la confirmación y el lenguaje de la ciencia** . . 251

1. Semántica y medida lógica según Kemeny (253).–2. El problema de las condiciones de adecuación (259).–3. Modificaciones y extensiones efectivas de la lógica inductiva (267).–4. La teoría de la confirmación y los lenguajes teóricos (275).

CAPITULO XIII. **La teoría de la confirmación y el problema epistemológico de la inducción** 282

1. La aplicación del método inductivo (284).–2. El uso de una lógica inductiva (292).–3. Los métodos inductivos y la justificación de la inducción (300).

CONCLUSION 308

APENDICES

APENDICE 1. **Nociones de morfología y de semántica** 315

1. Problemas de morfología (315).–2. El concepto de sistema semántico (317).–3. La noción de verdad lógica (318).

APENDICE 2. **La teoría de las álgebras de Boole y sus aplicaciones en lógica** . 320

1. El concepto de álgebra de Boole (320).–2. Las álgebras de fórmulas (324).–3. Las álgebras de predicados (325).

APENDICE 3. **Los conceptos fundamentales de la teoría matemática de probabilidades** 328

1. Definición de probabilidad. La teoría elemental de probabilidades (328).–2. Las probabilidades enumerables y las álgebras de Kolmogorov (330).–3. El concepto de variable aleatoria (331).

OBRAS CITADAS 335

INDICE DE MATERIAS 341

INDICE DE AUTORES 345

PREFACIO

Esta obra hace balance de los muy numerosos trabajos que los pensadores de la escuela neopositivista han consagrado a la teoría de la inducción. No es en modo alguno exhaustiva. La abundancia de la literatura impedía que lo fuera. En particular, era imposible mencionar los trabajos más recientes que aparecían cuando su redacción estaba ya muy avanzada; a decir verdad, me parece que ninguno de estos trabajos pone en cuestión las conclusiones obtenidas. Creo que este libro, bajo la forma que le es propia, da una idea suficientemente precisa de las direcciones de la investigación, de los métodos seguidos y de los resultados obtenidos y que permitirá al público filosófico francés descubrir la riqueza de una producción que demasiado a menudo ignora, cuando no desprecia, aunque atestigüe un afán de precisión sin el cual el análisis epistemológico está condenado a la palabrería inútil o a la esterilidad.

El lector encontrará en los apéndices una exposición de las conceptualizaciones utilizadas en el cuerpo de la obra, cuando éstas no son de uso corriente. De este modo estará en condiciones de seguir sin esfuerzo los desarrollos más técnicos.

Permítaseme dar las gracias a todos los que me han animado en la redacción de este trabajo, que me han posibilitado, gracias a un destino en el C.N.R.S., llevarlo a cabo, y más especialmente a M. **Poirier**, Miembro del Instituto, quien habría tenido a bien encargarse de su dirección. Dirijo igualmente mi agradecimiento a M. J. -Y. **Saudubray**, que ha contribuido a la corrección de las pruebas y a la constitución del índice.

El autor

INTRODUCCION

Todo análisis del conocimiento científico debe proporcionar una respuesta a un problema fundamental: dado que las proposiciones de las ciencias experimentales no pueden deducirse de los principios de la lógica formal, puesto que son verdades de hecho y no verdades necesarias, ¿de dónde obtienen su justificación? ¿Es preciso creer que es de la experiencia? Pero es imposible deducirlas de enunciados que resuman lo que ella nos ha enseñado. El solo hecho de que la ciencia permite la previsión muestra que contiene más de lo que la experiencia le suministra. Debemos pues reiterar nuestra pregunta: ¿de dónde obtienen sus justificaciones esas proposiciones? ¿Cómo legitimar la confianza que les otorgamos?.

Se sabe que, a partir de Kant, la filosofía iba a contar, entre el número de sus tareas esenciales, la de recoger el desafío humeano fundamentando la inducción. Sin embargo, antes de fundamentar la inducción, aún sería necesario saber en qué consiste. Ahora bien, desde el momento en que trata de definirla, el lógico se ve invadido por un escrúpulo. ¿No corre toda formulación el riesgo de ser demasiado restrictiva? Reducir la inferencia inductiva a la operación que permite pasar de los juicios de percepción a las leyes experimentales, y de esas leyes a los principios de las teorías científicas, ¿no es olvidar que el juicio de percepción más simple es el producto de una inducción? Por supuesto toda subsunción del dato sensible bajo un concepto supone ya el uso de esta operación. Sin inducción, quedaríamos reducidos en ella al puro flujo de lo vivido y, por natural que sea, el juicio perceptivo no es por eso menos inductivo. Admitimos pues, sin restricción, que no hay pensamiento acerca del objeto sensible que no constituya una inducción. Pero esta constatación no podría eximirnos de interrogarnos a propósito de la inducción. El carácter espontáneo de un paso, la firmeza de la convicción que lo acompaña (al menos en ciertos casos), el hecho de que está implicado por todo pensamiento, no podrían servir de excusas a la posición perezosa que confunde lo familiar y lo legítimo, lo natural y lo racional. El lógico tiene el deber de definir la inferencia inductiva y de tratar de justificarla. Asimismo puede exigir que se le den los medios de emprender esa tarea. Debe pues requerir ese derecho que invocaba **Bachelard**, en el *Essai sur la connaissance approchée,* de "negarse a las cuestiones de origen" y de "tomar el conocimiento en su curso, lejos de su origen sensible, cuando está ya mezclado íntimamente con la reflexión"[1].

Dado que la lógica ignora lo no formulado, lo inefable, no podrá llevar su análisis

[1] *E.C.A.*, p. 15.

más que sobre un conocimiento ya constituido que se expresa en los términos y en los enunciados de un lenguaje determinado. Para el lógico, toda descripción de la inducción vuelve a mostrar cómo se pasa de la aserción de ciertas proposiciones, las premisas de la inducción, a otras proposiciones que no se deducen de ellas, sus conclusiones. Definir un tipo de inferencia inductiva es indicar la forma de las conclusiones obtenidas cuando se establecen premisas de un tipo determinado.

Nos abstendremos pues de preguntarnos acerca del origen del conocimiento y partiremos de un estado del saber en el que ciertas proposiciones están ya establecidas. Esas proposiciones son los juicios perceptivos, juicios que la reflexión filosófica puede poner en duda, pero que place al sentido común tenerlos por ciertos y acerca de los cuales el hombre de ciencia admite difícilmente que no constituyan la roca sólida sobre la que está edificado todo nuestro conocimiento del universo.

En esos juicios de percepción no figuran más que los términos de un vocabulario determinado que se llamará el vocabulario perceptivo. Esos términos designan ya sea a los objetos que la experiencia sensible nos permite distinguir, ya sea a las propiedades o relaciones cuya atribución a tal objeto o a tal conjunto ordenado de objetos autoriza la percepción. Sería quizás útil extender ese vocabulario de tal manera que un juicio que exprese el resultado de una medida pueda ser considerado como un juicio perceptivo. A la vista de las dificultades que suscita una extensión semejante, renunciaremos a hacerla. Ciertamente, los límites del vocabulario perceptivo son difíciles de fijar con precisión. Es incluso probable que varíen con el nivel de cultura científica del sujeto que percibe. Pero no se podría dudar de que existen. Nadie negará que el predicado "azul" pertenece al vocabulario de la percepción y todo el mundo reconocerá que el término "entropía" no pertenece a él. Los juicios perceptivos encontrarán su expresión en las fórmulas singulares de un lenguaje de primer orden cuyas constantes pertenecen al vocabulario de la percepción y que llamaremos lenguaje de observación. Admitiremos que la percepción basta para garantizar la verdad o la falsedad de ciertas fórmulas de ese tipo.

Debemos constatar que las proposiciones de las ciencias experimentales no son juicios perceptivos. Es más, no podría concluirse su verdad de una clase finita de juicios perceptivos. No sólo son, en su mayor parte, proposiciones universales, sino que también son raras las que se expresan en el vocabulario de la percepción. Contienen los términos de otro vocabulario. Diremos que se expresan en el lenguaje teórico. El problema es, por tanto, saber lo que legitima su aserción. Es lo que se ha convenido en llamar el problema de la inducción.

Se reconoce universalmente que cabe a **Hume** el mérito incomparable de haber planteado el problema de la inducción en los términos más netos. Cierto que su análisis está restringido a los casos de inferencia causal, ya que la única cuestión que plantea es la de saber con qué derecho concluimos que tal efecto seguirá necesariamente a tal causa. Pero los resultados que obtiene pueden aplicarse a todos los tipos de inferencia inductiva. **Hume** demuestra, en primer lugar, que la relación causal no es analítica y que no se podría concluir lógicamente de la causa al efecto: "El co-

nocimiento de esta relación no se obtiene, en ningún caso, por razonamientos *a priori*", escribe[2]. Inútil objetar que los enunciados científicos permiten una inferencia tal, ya que es precisamente nuestro derecho a utilizarlos lo que se pone en cuestión. Es necesario pues recurrir a la experiencia para justificar la inducción. Pero la experiencia puede enseñar lo que ha pasado, lo que pasa, y no lo que pasará. La inferencia inductiva tiene por papel esencial permitirnos ir más allá de las constataciones experimentales; no puede pues estar fundada sobre esas meras constataciones. Se podría esperar justificarla mediante un principio que asegure que "el futuro se asemejará al pasado". Pero **Hume**, que no comparte ni el candor de **Mill** ni el dogmatismo de **Comte**, sabe que un principio tal no sirve para nada: "es imposible que ningún argumento extraído de la experiencia pueda probar la semejanza del pasado al futuro, pues todos los argumentos se fundan sobre la suposición de esta semejanza"[3].

De ese modo, concluye en el escepticismo: nada garantiza la verdad de las proposiciones que enuncian las ciencias experimentales. ¿Se puede entonces confiar en esa ley psicológica que es el hábito de inducir, tal como **Hume** parece invitarnos a hacer? Eso sería confundir el enunciado de un problema y su solución. Una conducción psicológica no podría servir de fundamento racional, a menos que se crea que la naturaleza sigue las leyes de nuestro psiquismo, lo que es la ruina de toda filosofía positiva. Decir que la inducción es un hábito no es justificarla en absoluto[4].

Desde hace dos siglos, el problema de la inducción se presenta por tanto como un verdadero desafío a todos los que pretenden que todos nuestro conocimientos derivan de la experiencia. Las epistemologías de la época contemporánea conocidas bajo los nombres de empirismo lógico o de neopositivismo lo encuentran en su camino. Están mejor armadas que el empirismo clásico para resolver los problemas que plantean las ciencias formales. Pero, ¿de qué les sirve su éxito en ese dominio si han de fracasar en el problema de la inducción? Las exigencias que establecen en materia de significación tornarán su descalabro en especialmente ruinoso. En esos sistemas, una solución del problema de la inducción está exigida no sólo para validar el conocimiento experimental sino, más simplemente, para atribuirle una significación. Se comprende que uno de los representantes más eminentes de esas doctrinas haya llegado a decir que, si ellas no pueden justificar la inducción, han desembocado en una quiebra definitiva[5].

En efecto, el neopositivismo ha tomado de nuevo por su cuenta la regla fundamental de Augusto **Comte**: "Toda proposición que no es estrictamente reductible a la simple enunciación de un hecho, o particular o general, no puede ofrecer ningún sentido real e inteligible"[6]. Por supuesto, el campo de aplicación de ese principio

[2] *E.E.H.*, p. 72.
[3] *E.E.H.*, pgna. 83-84.
[4] **Reichenbach** (H.), *C.I.*, p. 132.
[5] **Reichenbach** (H.), *T.P.*, § 84, p. 432.
[6] *D.E.P.*, § 12, p. 19.

está limitado únicamente a las proposiciones sintéticas. Además, muchos autores, más rigurosos que **Comte**, se niegan a invocar la noción oscura de "hecho general" cuyo uso supone que ya se han resuelto, al menos parcialmente, los problemas que plantea la inferencia inductiva. Se añadirá, por último, que "la significación de un enunciado se reduce a su método de verificación" y que, así, tienen el mismo sentido enunciados cuya verdad puede ser afirmada en circunstancias idénticas. Pero esas precisiones no tocan el fondo del problema. Sea tomado en esas formulaciones más refinadas o en el enunciado que brinda de él el *Discours sur l'esprit positif*, el criterio de significación parece despojar de toda significación a las proposiciones de las ciencias experimentales. Para que una proposición tenga un sentido, es preciso que la experiencia baste para garantizar su verdad; en otros términos, que sea equivalente a la conjunción de un número finito de juicios de percepción. Ese no es el caso de las proposiciones universales que aparecen en las ciencias experimentales. Sabíamos ya que la experiencia no puede asegurarnos su verdad. ¿Es necesario decir igualmente que están desprovistas de significación?

Debilitar el criterio, exigir simplemente, para atribuir un sentido a una proposición, que su verificación no sea inconcebible, es una mala solución. Por supuesto, una serie infinita de juicios perceptivos no es *lógicamente* imposible y, de este modo, recibirían un sentido ciertas proposiciones universales. Pero es contrario a las prácticas científicas, de donde extraen argumentos los filósofos positivistas, contentarse con una simple posibilidad lógica de verificación para atribuir un sentido a una proposición. Se pedirá que su verificación sea *físicamente* posible. Por ejemplo, la teoría de la relatividad exige convenciones para definir la simultaneidad a distancia. Pero ¿es una necesidad lógica la necesidad de convenciones para sincronizar relojes situados en lugares distintos? En modo alguno; si dispusiéramos de señales que se propagaran instantáneamente, las convenciones no jugarían allí ningún papel. Unicamente son necesarias las convenciones a la vista de la inexistencia de tales señales. Un juicio que afirme la simultaneidad de acontecimientos que se producen en lugares distintos está privado de sentido en tanto que no se haya definido por convención un tiempo universal, no tiene significación más que una vez precisado el sistema de referencia. ¿Quiere decir esto que, de otro modo, su verificación es lógicamente imposible? No, sólo que lo es físicamente. La solución propuesta nos alejaría pues de las prácticas efectivas de la ciencia que no atribuye importancia sino a la posibilidad *física* de verificación.

De igual manera, no basta con reemplazar "verificación" por "falsación" para salir del apuro, pues son las proposiciones existenciales las que quedarían entonces privadas de sentido. La sustitución del concepto de confirmación por el de invalidación no tiene las virtudes mágicas que se complace en atribuirle la escuela de **Popper**.

Apelar a un principio que permita generalizar, ir de algunos a todos, estimar como significativa y verdadera una proposición universal de la cual se han verificado algunos ejemplos, no es ninguna ayuda para resolver los problemas de la inducción y de la significación. **Comte** erigía en dogma "la invariabilidad de las leyes naturales".

Era quebrantar en vano los preceptos de la filosofía positiva. La inferencia inductiva no está contenida por entero en la generalización. Existe también la inducción que **Reichenbach** denomina *explicativa:* "Consiste en la inferencia desde ciertos datos de observación a una hipótesis o a una teoría de la cual son derivables esos datos"[7]. En términos precisos, llamaremos explicativas a las inducciones cuyas premisas pertenecen al lenguaje de observación mientras que las conclusiones no pertenecen a él. Por ejemplo, un enunciado acerca de la temperatura del sol o de la constitución atómica de la materia se obtiene por una inducción de ese tipo. Su aserción supone quizás que se han generalizado ciertas constataciones experimentales, pero necesita igualmente inferencias de otro tipo que el dogma comtiano no basta para justificar.

Es verdad que un principio que autorizara las generalizaciones sería quizás suficiente, si fuera siempre posible traducir los enunciados de los lenguajes teóricos que utiliza la ciencia a fórmulas del lenguaje de observación. Una posibilidad tal se lograría si existieran definiciones explícitas de las constantes del vocabulario teórico en términos del vocabulario de observación. ¿Pero es aceptable una hipótesis semejante? La doctrina conocida con el nombre de teoría de la construcción lógica se define por una respuesta afirmativa a esta cuestión. No hace más que expresar bajo una forma precisa ideas que no son extrañas a **Comte** y a su *teoría fundamental de las hipótesis,* expuesta en la lección vigésimo-octava del *Cours de Philosophie positive*[8] y es sin duda conforme al pensamiento de **Mach** quien afirmaba que los enunciados concernientes a los "objetos" del conocimiento científico no son más que simples modos de hablar de nuestras sensaciones, que un enunciado sobre el átomo, por ejemplo, no es más que una "abreviación para relaciones observadas entre cuerpos macroscópicos"[9].

Esta doctrina ha ejercido una gran seducción sobre ciertas mentes y se ha emprendido efectivamente la tarea de dar tales definiciones explícitas de las constantes teóricas. Pero las dificultades encontradas han mostrado la imposibilidad de la empresa[10] y la doctrina de la construcción lógica tiene consecuencias tan funestas que hoy está universalmente abandonada. Decir que de los enunciados teóricos pueden deducirse ciertos enunciados del lenguaje de observación no significa que aquéllos sean equivalentes a éstos. Es, por otra parte, esta exigencia desatinada la que había conducido a **Mach** a dudar del valor científico del atomismo y a **Comte** a englobar en una misma reprobación múltiples investigaciones que debían dar a luz a las ramas más fecundas de la ciencia. Evitar el regreso a tales errores, que han

---

7 *T.P.,* § 84, p. 431.

8 En este texto, **Comte** reprueba las teorías que apelan a fluidos que "son imaginados expresamente como intangibles, invisibles, imponderables". ¿Quiere decir esto que todo enunciado científico debe unir propiedades accesibles a la experiencia sensible? Uno se inclina a creerlo cuando se ve la importancia que **Comte** atribuye a este conocimiento (por ejemplo, lo que dice de la química y del gusto). Su Teoría parece pues muy próxima a la de **Mach.**

9 Citado por **Reichenbach** (H.), en *E.P.,* § 25, p. 213.

10 El problema de los "conceptos de disposición" basta para detener la empresa. Ese problema es el que ha llevado a **Carnap,** desde 1937, en *Testability and Meaning,* a renunciar a las ambiciones que manifestaba *Der logische Aufbau der Welt.*

lanzado el descrédito sobre la filosofía positivista, obligaba a renunciar a la doctrina de la construcción lógica. Al mostrar que ella no puede dar cuenta del progreso de la Ciencia, **Braithwaite** hace patentes sus insuficiencias[11]. No podemos pensar en hacer aquí una crítica exhaustiva de esta doctrina. Nos bastará con constatar que no vuelve a encontrar más defensores y que **Reichenbach**, uno de los más eminentes defensores del neo-positivismo, no vacila en escribir que "la idea de que todo lo que la física establece no sería sino un simple resumen de las proposiciones de observación no podría sobrevivir a una crítica rigurosa"[12]. Su éxito efímero no hacía más que revelar la confusión de los epistemólogos empiristas cuando requerían justificar la inducción. En todo caso, limitar las formas de ella a la simple generalización no puede constituir una solución satisfactoria de los problemas que suscita esta operación.

El problema planteado permanece, por tanto, íntegro: una vez reconocida la variedad de las formas de inferencia inductiva que utilizan las ciencias experimentales, es preciso legitimar su empleo. ¿Cómo alcanzar ese fin sin abandonar el principio según el cual todo conocimiento deriva de la experiencia? Pero hay más: es necesaria una solución, al menos parcial, de esta cuestión para conferir una significación a las proposiciones de las ciencias experimentales.

Se puede dar una enunciación del criterio de significación más satisfactoria que las formulaciones primitivamente propuestas. De este modo, no estaremos forzados a estimar *todas* las proposiciones de las ciencias experimentales como carentes de sentido. Pero los resultados obtenidos en ese terreno justifican la frase de **Planck**, quien afirma que " no es posible decidir jamás *a priori* si una magnitud física es observable o no, si una pregunta posee un sentido o no. Esos problemas no pueden recibir una respuesta excepto si los consideramos desde el punto de vista de una teoría determinada"[13]. El ejemplo de la teoría de la relatividad es muy palpable: admitido que ninguna señal se transmite a una velocidad superior a la de la luz, se puede establecer que el tiempo newtoniano es un concepto desprovisto de significación física. Pero la hipótesis es necesaria para concluir y únicamente puede establecerla la inferencia inductiva. Sería pues abusivo extraer argumentos de posiciones sumarias y de fórmulas tajantes concernientes a los requisitos de la significación para concluir que el positivismo priva de sentido a todas las leyes experimentales. Otros criterios tienen consecuencias menos ruinosas. Pero no pueden constituir una solución adecuada a los problemas de significación salvo si se supone que previamente han sido resueltas las cuestiones que conciernen a la inducción. La justificación de esta operación es indispensable para garantizar la validez de las proposiciones de las ciencias experimentales; eso no ofrece ninguna duda. Pero igualmente lo es para asegurarse de su significación. En esas condiciones, se comprende que las filosofías positivistas hayan dado a este problema toda la importancia que merece.

[11] *S.E.*, cap. 3, pp. 50-87.
[12] *E.P.*, § 7, p. 50.
[13] *I.M.*, p. 23.

Sin embargo, ante las dificultades que encuentra su solución, negar su existencia es una solución tentadora. Tal es la tesis, sostenida en ciertas formas extremas de nominalismo, que fué favorablemente recogida por ciertos positivistas. Se negará que las proposiciones de las ciencias experimentales puedan ser invalidadas o verificadas por la experiencia. Constituyen simples definiciones. Según **le Roy**, la ley de **Galileo** no sería más que la definición de la caída libre. Pero si todas las leyes, todos los principios de las ciencias experimentales son sólo definiciones, es preciso afirmar que no son sintéticas más que en apariencia y que una investigación en profundidad revelaría su carácter analítico. En esas condiciones, no se plantearía el problema de la inducción y las cuestiones de significación quedarían reducidas a problemas de sintaxis.

No se trata en absoluto de restringir el papel de las definiciones, de las convenciones, en la constitución de la ciencia. Se sabe que los procedimientos mediante los cuales se verifica una ley no son tan simples como gusta imaginar. Los pasos que conducen desde los enunciados del lenguaje teórico a las fórmulas del lenguaje de observación están cargados de ambigüedad y parece que, por naturaleza, la semántica del lenguaje de las ciencias experimentales no puede constituirse bajo la forma de una disciplina rigurosa. Pero, ¿puede concluirse de ello que el conjunto de una ciencia experimental se reduce a un vasto sistema de convenciones? Una solución de ese tipo es ruinosa, porque priva al conocimiento científico de todo valor predictivo. Los argumentos que la sostienen son muy débiles. Por supuesto, de un enunciado particular se puede afirmar que no es más que una definición y mostrar así que el problema de la inducción no se plantea respecto a él. Pero no de todos los enunciados a la vez. En suma, se puede desplazar el problema de la inducción, pero no se podría eliminarlo globalmente.

Es preciso, por tanto, afrontar este problema y, como hemos visto, las doctrinas empiristas parecen inermes para resolverlo. Por eso extraen argumentos de su fracaso todos los pensadores que, siguiendo a **Kant**, han querido mostrar que la constitución de las ciencias experimentales necesita principios sintéticos *a priori*. Una tradición sólidamente anclada justifica la filosofía crítica a partir de un estudio del problema de la inducción. Es natural que se proceda así. En opinión misma de **Kant**, es una reflexión sobre la crítica humeana la que le ha llevado a establecer su teoría del conocimiento, impulsando hacia su término natural esa crítica que **Hume** habría limitado artificialmente sólo a los casos de inferencia causal cuando concierne a todo juicio sintético *a priori*. Es fácil probar que la experiencia no puede bastar para legitimar las conlusiones que la inducción nos permite establecer y sin las cuales no habría conocimiento científico de la naturaleza. Si el problema de la inducción se plantea en los términos tradicionales, el escepticismo parece la culminación natural del empirismo. Pero, ¿quiere decir esto que los adversarios de esta filosofía están en posición fuerte cuando se trata de dar cuenta de la constitución de las ciencias experimentales? No ocurre nada de eso, como vamos a ver.

La experiencia es insuficiente para fundamentar las conclusiones inductivas. He

ahí una afirmación trivial ya que resulta inmediatamente de la definición de la inferencia inductiva. Si se está de acuerdo con **Kant** en que "no se podría llamar ciencia más que a aquélla cuya certeza es apodíctica"[14], ¿cómo conferir a los enunciados de las ciencias experimentales la necesidad y la universalidad que caracterizan a las leyes? La única solución es, parece, dar a la inducción principios que sean ellos mismos apodícticos y por tanto *a priori*. Ni que decir tiene que esos principios deben ser sintéticos. Pero dos problemas distintos se plantean con respecto a ellos: se trata, por una parte, de determinar cuáles son y su papel exacto en el fundamento de la inducción. Por otra parte, es preciso fundamentarlos también a ellos. Ahora bien, si a este último problema se le puede aportar una respuesta casi satisfactoria, no ocurre lo mismo con la primera cuestión.

Admitiremos que la lógica trascendental sirve para determinar principios que son las condiciones *a priori* de posibilidad de la experiencia. Esas condiciones pueden estar fijadas *a priori* "puesto que resultan de la naturaleza misma de nuestro espíritu"; se aplican a los objetos de la experiencia "ya que fuera (de ellas) no hay para nosotros ni experiencia, ni objeto". Así se expresa **Lachelier**, fiel intérprete del pensamiento kantiano[15]. Habida cuenta del sentido que **Kant** da al concepto de experiencia, es preciso decir que esos principios enuncian condiciones que deben ser cumplidas para que sea posible un conocimiento científico de la naturaleza. En cierto sentido, podemos estimarlos como "principios de la inducción": si no fueran válidos, ningún conocimiento científico sería posible y, por tanto, tampoco ninguna de esas inferencias inductivas por las que está constituido ese conocimiento. Si no presupusiéramos la posibilidad de una representación tal que los fenómenos se sometan a leyes, no trataríamos de construir una ciencia de la naturaleza.

Pero, ¿quiere decir ello que esos principios confieren la certeza a las inferencias inductivas, que las validan? He ahí un problema muy distinto y parece que se impone una respuesta negativa. **Hannequin** hacía notar que los principios del entendimiento, y más especialmente las analogías de la experiencia, "principios supremos de inteligibilidad sin los cuales no habría para nosotros ni Naturaleza, ni ciencia de la naturaleza" no pueden ser estimados, sin grave alteranción del pensamiento de **Kant**, como "principios de la ciencia o perteneciendo ya al campo positivo de la ciencia"[16]. Los principios de las ciencias positivas no hacen más que "verificar" los principios del entendimiento y deben ser distinguidos de ellos. Si los tres axiomas de **Newton** verifican las analogías de la experiencia, ocurre lo mismo, por ejemplo, con los principios de la energética. Esas conclusiones de **Hannequin** no tienen quizás el mérito de la originalidad, pero tienen sin duda el de la claridad. Están confirmadas por los textos en los que **Kant** afirma que es necesario recurrir a la experiencia para conocer "las leyes particulares que atañen a fenómenos determinados empíri-

[14] *P.M.N.*, p. 8.
[15] *F.I.*, p. 48.
[16] Prefacio a *C.R.P.*, p. V.

camente". leyes que "no pueden derivarse íntegramente de las categorías, si bien, en su conjunto, se les someten"[17].

Pero admitida la distinción entre principios del entendimiento y principios de las ciencias positivas, ¿qué papel juegan los primeros en la justificación de la inferencia inductiva? Enuncian las condiciones que debe satisfacer una representación científica del universo, pero no garantizan su verdad. Se dirá que cabe a la experiencia determinar las leyes particulares cuyo sistema debe, además, satisfacer ciertas condiciones que expresan los principios del entendimiento. Pero ¿cuál puede ser la función de la experiencia, cómo puede ella justificar ciertas leyes? ¿Es preciso creer que basta con que excluya las leyes incompatibles con los hechos para legitimar las otras? En otros términos, ¿se puede suponer que no hay más que *una* representación científica posible que, a la vez, satisfaga los principios *a priori* y sea compatible con los datos de la experiencia? Una hipótesis semejante no tiene apenas fundamento y, sin embargo, parece necesario adoptarla si se quiere encontrar una respuesta al desafío de **Hume** en la filosofía kantiana.

Tal es el dilema frente al que se hallan todos los autores que se proclaman kantianos: O bien sostendrán que los principios del entendimiento y los datos de la experiencia determinan las leyes. En otros términos, afirmarán que los principios del entendimiento se pueden añadir a las premisas constituidas por la enunciación de los datos de observación y que, gracias a esas premisas adicionales, pueden deducirse las conclusiones de las inferencias inductivas necesarias para constituir la representación científica. Manteniendo enteramente la distinción entre principios del entendimiento y principios de las ciencias positivas, no se contentarán con el hecho de que los segundos verifiquen los primeros; tratarán de probar que se deducen de ellos, una vez dados los hechos. O bien, reconocen que los principios del entendimiento tienen por único papel determinar condiciones formales impuestas al sistema de representación científica, que restringen las opciones posibles pero no suprimen el equívoco; y entonces se mantiene el problema de distinguir inducciones buenas y malas, de justificar tal conclusión inductiva particular. Subsistiría la obligación de resolver el problema de **Hume**, a pesar de la apelación a la filosofía crítica.

La elección realizada entre las dos soluciones no es siempre clara, pero es preciso confesar que muchos autores, comenzando por el propio **Kant**, se han comprometido con la primera vía, por peligrosa que sea. Animados por el deseo de conferir la apodicticidad a las ciencias de la naturaleza, han creído en la posibilidad de deducir sus leyes. La metafísica de la naturaleza que constituye **Kant** no por no ser *pura* es por ello menos *a priori.* Se define como la ciencia "que se ocupa de la naturaleza de un objeto del cual se da un concepto empírico" y se pregunta lo que "la razón es capaz de conocer (de él) *a priori*"[18]. En los *Primeros principios metafísicos de la*

[17] *C.R.P.*, pp. 165-166 (el texto pertenece a la segunda edición).
[18] *P.M.N.*, pp. 10-11.

Ciencia de la Naturaleza, se trata de deducir las leyes de la mecánica[19] del concepto de materia. Asimismo **Lachelier,** después de haber deducido la ley de las causas eficientes pretende, "mediante una nueva deducción", "determinar la naturaleza de los fenómenos mismos"[20]. Este tipo de deducción tiene un alcance asombroso, ya que él se enorgullece de haber explicado "por qué un movimiento que sucede a otro debe conservar tanto como sea posible la misma dirección y la misma velocidad"[21]. **Lalande** parece adherirse a esta misma doctrina cuando formula en estos términos el problema de la inducción: "¿Qué postulados sería preciso escribir a la cabeza de nuestro trabajo si intentáramos exponer una prueba inductiva en tan buen orden lógico como fuera posible, al igual que se expone una demostración lógica o filosófica?"[22] Plantear una cuestión semejante es suponer implícitamente la existencia de un cuerpo de principios que, añadidos a título de premisas adicionales, autorizan la deducción de las conclusiones de las inferencias inductivas a partir de las premisas y, además, el mismo autor presenta la inducción como "un modo de razonamiento" que no es más que "la aplicación de los principios"[23].

No creemos necesario someter a proceso tentativas semejantes. Terminan siempre confiriendo la apodicticidad a enunciados que la ciencia en su progreso acaba por abandonar, lo que basta para condenarlas. ¿Quién puede pretender que las analogías de la experiencia o los principios que enuncia **Lachelier** validan una inferencia de algunos a todos? No obstante, a la vista de la importancia del problema, nos será preciso, efectivamente, probar que, en ese sentido, no hay principios de la inducción[24]. De momento, hagamos notar que los autores de que hablamos no están enteramente convencidos de sus propias empresas. A los principios constitutivos, **Kant** añade principios reguladores, necesarios al menos para determinar las leyes particulares de la naturaleza. **Lachelier** señala que la inducción no tiene más que una certeza "virtual", y **Lalande** distingue del problema de los principios de la inducción y de su fundamento la cuestión de las "técnicas inductivas". ¿Quiere decir esto que los textos que evocábamos precedentemente no son más que imprudencias de lenguaje? No exactamente. Revelan por lo menos la voluntad de no renunciar a una esperanza: encontrar y fundamentar principios que nos autoricen a tener por ciertos los resultados de las ciencias experimentales. Renunciar a esa esperanza sería confesar que la filosofía crítica no puede disipar el escepticismo humeano.

Ciertamente, según hemos dicho, sería posible reconocer que únicamente son *a priori* en las ciencias los principios que enuncian las condiciones de su posibilidad

[19] Se deducen no sólo los principios fundamentales de la mecánica racional, sino también otros enunciados más particulares: Toda fuerza es central; la atracción actúa instantáneamente a distancia. Que se trata de una deducción *a priori* queda manifiesto cuando se constata que **Kant** hace notar que **Newton** "no se aventura a demostrar *a priori*" la igualdad de acción y reacción sino que "apela a la experiencia". (*P.M.N.,* p. 118.)

[20] *F. I.,* p. 57.

[21] *F.I.,* p. 82.

[22] *P.I.,* p. VIII.

[23] *T.I.E.,* p. 224.

[24] Acerca de este punto, remitimos al capítulo 2, § 1.

y que esos principios no comparten su apodicticidad con ningún enunciado científico particular. Pero el sacrificio ha parecido demasiado grande. Y, sobre todo, esta interpretación de la filosofía crítica deja una cuestión pendiente: si los principios del entendimiento no garantizan la validez de las conclusiones inducidas, ¿qué es lo que justifica la confianza que otorgamos, de modo preferente, a algunas de entre ellas? Se mantiene la obligación, parece, de constituir una teoría que discrimine las inducciones válidas y, circunstancialmente, mida su grado de certeza. Pero, a no ser que se la conciba como una doctrina de la prueba a partir de principios, no se sabe ni lo que debe ser una teoría tal, ni siquiera si es posible. Por eso se ha preferido vivir en la ceguera, dejando a **Popper** el honor de ser el primero en proclamar claramente que no hay lógica inductiva, entendamos, teoría de la prueba inductiva.

Pero esta actitud de los filósofos de la tradición kantiana debía tener una consecuencia enojosa para su doctrina. Por haber presentado los principios del entendimiento como lo que no son, a saber, instrumentos de la prueba inductiva, debían exponerse a los sarcasmos de sus adversarios, cuyas interpretaciones sumarias estimulaban. Dejando en terreno baldío los problemas que dependen de la metodología inductiva, incapaces de integrar en su teoría del conocimiento las prácticas efectivas de los hombre de ciencia y de dar cuenta de ellas, dejaban el campo libre a aquéllos que querían retomar el problema de la inducción e intentar resolverlo trasladándolo al terreno de la probabilidad. Y, como vamos a ver, semejantes intentos, inspirados por la renovación de las epistemologías empiristas, iban a estar cargados de una significación filosófica amenazadora para la teoría kantiana del conocimiento.

Las filosofías tradicionales de la inducción manifiestan claramente sus insuficiencias. Por eso estamos en el derecho de preguntarnos si no se ha impedido la constitución de una lógica de la inducción por haber exigido demasiado. Se ha reclamado la certeza de las conclusiones inductivas en tanto que se sabía que toda inducción es precaria. Pero nos hemos visto forzados a afirmar que esta certeza es puramente virtual. La situación sería quizás radicalmente diferente si nos limitáramos a afirmar la probabilidad de las conclusiones inductivas. En esas condiciones nuevas, ¿no podría construirse una teoría lógica de la inducción? Un proyecto semejante es natural: corresponde, como se ha dicho, "a una intención tenaz y profunda de nuestro espíritu: tratar de alcanzar, en el interior mismo del conocimiento conjetural, un elemento sólido y definitivo"[25]. Pero tiene también otro mérito: reintegrar a una teoría de la inducción las reglas metodológicas a cuya aplicación debemos la constitución de la ciencia.

Desde que existe una ciencia de la naturaleza, se sabe que la única confirmación de sus leyes viene del hecho de que la experiencia verifica sus consecuencias: se sabe igualmente que si la falsedad de las consecuencias trae aparejada la de los principios, no se puede concluir de la verdad de las consecuencias la de los principios. Como escribía **Leibniz**, "en las hipótesis astronómicas o físicas, no procede el retorno,

[25] R. **Poirier**: *R.P.I.*, p. 8.

pero asimismo el éxito no demuestra la verdad de la hipótesis"[26]. Pero decir que la verdad de los principios no puede concluirse lógicamente de la de las consecuencias no significa que sea contrario a la razón admitir una principio cuyas consecuencias han sido verificadas. Además, de un enunciado científico confirmado por múltiples hechos, se dirá que es contrario al buen sentido no tenerlo por verdadero, incluso si esa negativa no pone en contradicción lógica con lo que la experiencia enseña. Ahora bien, este hecho fundamental se ha expresado en términos de probabilidad. De una hipótesis cuyas consecuencias múltiples han sido verificadas, se ha dicho que es probable, porque es improbable que de un principio falso se deduzcan una multitud de consecuencias que la experiencia verifica. "Si es posible que lo verdadero se concluya de lo falso,... no es siempre probable, sobre todo cuando una sola hipótesis da razón de muchas verdades, lo cual es raro y difícilmente ocurre", escribe **Leibniz**[27].

Esta tradición de la filosofía de la hipótesis, nacida con la astronomía griega, debía conducir a la introducción de un cierto número de reglas metodológicas que han dirigido la práctica científica efectiva. Esas reglas se expresan a menudo bajo una forma tal que se resuelven en la determinación de un orden de probabilidades entre hipótesis concurrentes. Así el precepto que enuncia **Leibniz**: *"Illud tamen fatendum est, hypothesin tanto fieri probabiliorem quanto intellectu simplicior, virtute autem ac potestate amplior est, id est quo plura phenomena et quo paucioribus assumtis solvi possunt"*[28]. De este modo, mientras que los lógicos se esforzaban en justificar el paso de las consecuencias a los principios, bautizado como inducción, confiriendo la certeza a los principios, los hombres de ciencia se contentaban con determinar las hipótesis más plausibles.

La tentativa de constituir una lógica inductiva en términos de probabilidad parece ser la prolongación natural de esta metodología de las ciencias inductivas. Su fin será codificarla y justificarla. Codificar significa hacer un recuento de esas reglas y darles una enunciación estricta, pues la realidad es que su expresión queda a menudo imprecisa. Así, según el precepto de **Leibniz**, sería preciso definir con todo rigor lo que se llama la simplicidad de una hipótesis o de un sistema de hipótesis, decir cómo se estima su "fuerza". Justificarlos, porque esos preceptos no se establecen sin más. Consideremos, por ejemplo, la regla corrientemente admitida según la cual la enumeración simple da a una ley universal una probabilidad creciente con el número de casos de confirmación y tiende hacia la certeza cuando ese número tiende hacia el infinito. Un postulado tal, utilizado en el *Sistema de lógica deductiva e inductiva,* no es evidente en modo alguno. **Nicod** tiene razón al maravillarse de que no inspire "ni duda, ni siquiera curiosidad al más ilustre de los lógicos de la inducción"[29]. Es pues necesario, en tanto que pueda hacerse, demostrar la validez de las reglas de este tipo.

---

[26] *N.E.E.*, L. IV, cap. 17, § 5.
[27] *N.E.E.*, ibid.
[28] Carta a Conring (16 de marzo de 1689, *P.W.*, I., pp. 195-196.
[29] *P.L.I.*, p. 17.

No existe duda alguna de que se trata de una tarea considerable y de que la lógica inductiva clásica es de poco valor para llevarla a cabo. No basta con afirmar que, si no se reunen las condiciones que hacen cierta la inducción, se obtiene una conclusión probable, pues "faltando la certeza, queda la probabilidad entera por establecer y hay que rehacer la teoría toda"[30]. Pero, para que sea posible una empresa de este tipo, se necesita también estar en posesión de una doctrina que permita tratar formalmente el concepto de probabilidad. Ahora bien, la teoría matemática de probabilidades parece ofrecer una posibilidad semejante.

Conferir tal función al cálculo de probabilidades es un proyecto antiguo. Los fundadores de esta disciplina no parecen tener intención de limitar a ella el campo de aplicación. **Bernouilli**, por ejemplo, considera que el *ars conjectandi* se aplica a todo aquéllo de lo que no estamos ciertos. Se encuentran en su obra pasajes que permiten pensar que él no habría renegado de las tentativas que se han hecho para utilizar el cálculo de probabilidades en la constitución de una lógica inductiva[31]. Pero es **Laplace** el primero que hace explícitamente uso de ese cálculo para resolver el problema de **Hume**. En el *Essai philosophique sur les probabilités*[32], propone determinar la probabilidad de la conclusión de una inducción por enumeración simple. El ejemplo elegido –se trata de calcular la probabilidad de que el sol salga mañana, o de que continúe saliendo todas las mañanas, en el supuesto de que se sepa que ha salido *n* veces– muestra que su intención es recoger el desafío humeano. Las hipótesis que le permiten concluir son discutibles: **Laplace** asimila la cuestión a un problema de tirar a suertes y lo resuelve mediante el empleo de un "esquema de bombos", utiiizando el famoso principio de equiprobabilidad. Pero, sobre todo, los resultados obtenidos son decepcionantes: estamos forzados a atribuir una probabilidad nula o toda ley universal[33]. Resultado si no absurdo, al menos sorprendente.

A pesar de la advertencia de **Cournot**, que pedía que se distinga el concepto matemático de probabilidad lo que él llama una "probabilidad filosófica", única en cuestión en la inducción, a pesar de la mediocridad de los resultados obtenidos por **Laplace**, se prosiguen las investigaciones. Más que concluir en la imposibilidad de la empresa, se ha incriminado la insuficiencia de las técnicas empleadas; se ha creído que el desarrollo de la teoría matemática de probabilidades hacía hoy posible lo que no lo era en tiempos de **Laplace**. El nacimiento de los métodos de inferencia estadística parecía justificar esa esperanza: el método de test de las hipótesis, desarrollado en la escuela de R. A. **Fisher**, ¿no permite acaso determinar la probabilidad de

[30] *P.L.I.*, p. 10.

[31] Ver especialmente los textos contenidos en la cuarta parte del *Ars Conjectandi*, así como la polémica con **Leibniz** *(M.S.*, T. 3, p. 71-97) que muestra que **Bernouilli** no vió los límites de los procedimientos que tienden a legitimar la inducción mediante el cálculo de probabilidades, mientras que **Leibniz** los vió perfectamente.

[32] *E.P.P.*, pp. XVII-XVIII.

[33] Numerosos sistemas de lógica inductiva conducen al mismo resultado, a pesar del deseo contrario de sus autores. Añadamos que la regla de **Laplace** obliga a concluir que una ley universal verificada por un solo ejemplo tiene dos probabilidades sobre tres de ser verificada por el próximo ejemplo.

una hipótesis estadística cuando se está en posesión de un conjunto de datos experimentales? El nombre que se le atribuye, ¿no prueba que sus creadores han visto en él un método que aporta la solución de ciertas cuestiones de lógica inductiva? El hecho es que ciertos matemáticos han alentado esta interpretación. **Copeland** declara que los estadísticos estudian, en esos métodos, "la esencia del razonamiento inductivo"[34] uniéndose al filósofo que proclama que "el cálculo de probabilidades se ha convertido, poco a poco, en la lógica de la ciencia"[35]. Cierto que muchos autores, y no de los menores, han protestado contra la extensión atribuida a los métodos que habían descubierto. **Fisher** mismo condena el abuso que se hace del método de test de hipótesis. Pero sus epígonos son menos prudentes y uno de ellos no vacila en escribir que ese método se aplica "al conjunto de la investigación experimental"[36].

Sin llegar hasta el punto de afirmar que el cálculo de probabilidades constituye, en sí mismo, una lógica de la inducción, no es insensato pensar que puede jugar un papel esencial en la constitución de una disciplina semejante. Esta idea iba a recibir un desarrollo sistemático cuando los filósofos de la escuela neo-positivista se apropiaron de ella. Son fáciles de averiguar las razones que han llevado a estos autores a otorgarle una considerable importancia. Hemos visto que las filosofías positivistas están inermes para resolver los problemas de la inducción si se plantean en los términos que la tradición nos ha transmitido. Hemos expuesto las graves consecuencias que de ello resultan para estas doctrinas; según ellas, problemas de significación y problemas de inducción están íntimamente ligados y, de resolver mal los últimos, se corre el riesgo de despojar de toda significación a las proposiciones de las ciencias experimentales. Pero, además, sin lógica inductiva, no se puede pretender construir esa epistemología formal cuya posibilidad es un punto fundamental de la doctrina neo-positivista.

Toda doctrina positivista se caracteriza por el intento de erigir en ciencia positiva a la teoría de la ciencia. Para aquéllos que quieren probar que el conocimiento científico es plenamente independiente de toda metafísica, es indispensable sustituir por una ciencia positiva la epistemología tradicional, que dependía de una teoría filosófica del conocimiento. **Comte** atribuía esa función a la Sociología. Pero otorgar a esta ciencia, o a cualquier otra ciencia humana, "la entera preponderancia normal", sólo puede llevar a la construcción de una doxología que difícilmente puede hacerse pasar por una teoría de la ciencia. Conscientes de ese hecho, los positivistas modernos han buscado por otra parte la disciplina positiva que permita al conocimiento científico ser, en sí mismo, su propia teoría. Han creído encontrarla en la lógica formal, que estiman como ciencia positiva. Será competencia de esta disciplina constituir una teoría del pensamiento matemático que sustituirá así a la epistemología matemática de la tradición filosófica. No se trata de discutir estas

[34] *S.I.F.*, p. 27.
[35] **Reichenbach** (H.), *F.L.P.*
[36] **Bross** (I.), *P.D.R.*, p. 203.

tesis en esta obra. Pero, suponiendo que se las admita, únicamente resulta de ellas la posibilidad de que se establezca una epistemología científica. Queda por probar que lo que se ha hecho para las ciencias formales pueda hacerse para las ciencias fácticas. Se lograría ese resultado si se mostrara que la lógica formal puede servir para la descripción, el análisis y la legitimación de los pasos del pensamiento inductivo.

Llamamos epistemología formal a la doctrina de la ciencia obtenida al aplicar la lógica formal al análisis del pensamiento científico. La posibilidad de una epistemología semejante, su capacitación para constituir una teoría plenamente satisfactoria del pensamiento científico, son los temas en torno a los cuales se efectúa la unidad del movimiento positivista contemporáneo. Se ve cómo la constitución de una lógica inductiva es una condición necesaria para que esas doctrinas alcancen sus fines.

Que esta lógica inductiva deba ser probabilitaria no iba a disgustar a los filósofos positivistas. La insuficiencia de las teorías clásicas de la inducción se atribuirá al hecho de que se ha querido construir una doctrina que trata al conocimiento como un sistema definitivo. Es cierto que siempre se ha reconocido la falta de certeza del conocimiento experimental y su carácter aproximativo. Cuando se trata de aplicaciones prácticas, se tienen en cuenta esos caracteres considerados como males inevitables, pero se cree tener el derecho de despreciarlos en el análisis epistemológico[37]. No hay nada de asombroso en que filósofos racionalistas adopten una actitud semejante, pero es extraño que autores que se estiman inspirados por el empirismo compartan la responsabilidad del error. Sucede que, como observa **Reichenbach**, "la intención del positivismo moderno fué restablecer el conocimiento en una certeza absoluta", intención que recoge del programa cartesiano. Ahora bien, la crítica humeana tiene un carácter definitivo y vale tanto contra el positivismo moderno como contra el racionalismo clásico, pues "el ideal de un conocimiento cierto es el que lleva al escepticismo"[38]. **Reichenbach** concluye de ahí que los filósofos empiristas deben liberarse de ese "absoluto" que es la idea de un conocimiento cierto para escapar de la ruina: "el empirismo se ha desplomado bajo los golpes de la crítica de la inducción hecha por **Hume** porque no se había liberado de un postulado esencialmente racionalista, el postulado de que todo conocimiento debe poder demostrarse como verdadero"[39]. Si, por el contrario, se acepta tomar la obra científica en su carácter de inacabada, con sus imperfecciones, puede evitarse el escepticismo. Así, un empirismo liberado del "absoluto" de la certeza estaría en condiciones de dar cuenta de las ciencias inductivas sin quebrantar sus principios y de tomar su revancha sobre las filosofías inspiradas por el kantismo, que no podían dar nacimiento a una teoría coherente de la inducción.

Para cumplir correctamente esa tarea, quizás no basta con renunciar a estimar a la ciencia como un conocimiento cierto. Sería preciso asimismo abandonar las concepciones corrientes que la asimilan a un medio de conocimiento para ver en ella un

[37] Cf. **Reichenbach** (H.), *E.P.*, pref., p. VI.
[38] *E.P.*, § 38, pp. 344-345.
[39] *A.P.S.*, pp. 307-308.

conjunto de reglas de acción. Tal sería la significación de la teoría de la apuesta, expuesta por **Reichenbach**, en la cual ha creído ver **Cavailles** un planteamiento del problema del conocimiento que renovaría la filosofía[40]. Algunos autores han desarrollado sistemáticamente esas opiniones. Han pensado que los progresos recientes del cálculo de probabilidades las justificaban. Así, la noción de comportamiento inductivo introducida por Jerzy **Neyman**[41], la teoría de las funciones de decisión estadística de **Wald**, el concepto de estrategia de la teoría de juegos, mostrarían que la inferencia estadística plantea sus problemas en términos de acción. La inferencia estadística dependería de una praseología más que de una gnoseología. Implicaría un nuevo modo de recorte de los fenómenos e invitaría a plantear los problemas de la inducción no en términos de conocimiento, aunque fuera conocimiento probable, sino de acción eficaz. La inducción debería legitimarse a título de estrategia óptima. Inútil decir que muchos pensadores han visto, en esta perspectiva, un medio de rehabilitar esa filosofía pragmática que en todo tiempo ha inspirado el espíritu positivista.

El fin de esta obra es examinar las tentativas que se han hecho para constituir una lógica inductiva probabilitaria. Los sistemas que se han construido, ¿tienen el alcance y la significación que nos complace atribuirles, aportan una respuesta a los problemas epistemológicos fundamentales que intentamos resolver con su empleo? Plantear los problemas de la inducción en términos de probabilidad, incluso de acción eficaz, ¿es el medio de resolverlos o un simple procedimiento para disimularlos? Tales son las cuestiones que trataremos y, al mismo tiempo, se pondrán en cuestión la existencia de una lógica inductiva y la posibilidad de una epistemología formal.

[40] *C.P., passim.*
[41] *F.T.E., passim.*

PRIMERA PARTE

La idea de una Lógica inductiva probabilitaria

CAPITULO I

LA EPISTEMOLOGIA FORMAL Y EL CONCEPTO DE LOGICA INDUCTIVA

Existe una disciplina positiva que determina las reglas canónicas a las cuales se somete la demostración válida. De modo más general, analiza la estructura de las ciencias demostrativas, describe, censa y eventualmente valida los procedimientos que ellas emplean. Explicita y define los conceptos cardinales sobre los que descansa el pensamiento demostrativo. Esa disciplina no es otra que la lógica formal.

Por supuesto, se puede poner en cuestión su suficiencia; pretender que, aplicada al análisis del conocimiento matemático, se comprueba que es incapaz de resolver ciertos problemas específicamente filosóficos; exigir que la lógica formal objetiva se funde sobre alguna lógica trascendental. Del mismo modo, se someten a discusión su fin exacto, sus relaciones con una lógica "natural", cuyas leyes son intuitivamente evidentes: ¿debe codificar simplemente los tipos de demostración cuya validez está reconocida en la práctica científica o es necesario que los justifique? y, en este último caso, ¿en qué puede consistir esa justificación? Pero no se podría negar su carácter positivo, ya que, desde **Aristóteles**, se presenta a sí misma bajo la forma de una ciencia demostrativa; ni dudar de su eficacia, que atestiguan los resultados obtenidos por la lógica contemporánea en el análisis de las teorías matemáticas.

La existencia de la lógica formal, la amplitud de los resultados que permite obtener cuando se la aplica al estudio del conocimiento matemático, han sido argumentos fundamentales en la constitución del positivismo contemporáneo. Se ha atribuido a la lógica el papel que corresponde, en **Comte**, a la sociología: la constitución de una teoría de la ciencia. El análisis lógico sería "el método de la nueva filosofía", siendo definida la epistemología como la lógica aplicada al análisis de la ciencia[1]. A esta lógica de la ciencia le incumbiría resolver los problemas que, en la tradición filosófica, dependen de la teoría del conocimiento. O, más exactamente, es preciso describir así la situación: ciertos problemas epistemológicos dependen de una disciplina científica particular. Es el caso de todas las cuestiones relativas a los condicionamientos de la adquisición del conocimiento científico: pertenecen a las ciencias humanas. Las otras, o bien son seudo-cuestiones o bien constituirán el objeto de un tratamiento positivo dependiente del análisis lógico. Así, "la lógica de la ciencia to-

[1] Cf., especialmente, **Carnap** (R.), *A.N.L.*, p. 7 y 31.

ma el lugar del inextricable nudo de problemas conocido bajo el nombre de filosofía"[2].

Al mismo tiempo que era asignada a la lógica una función esencial, su naturaleza era determinada con precisión. Se sabía, desde **Aristóteles**, que la lógica debía ser formal o no sería. La operación que consiste en suprimir de una proposición toda referencia a objetos determinados, a "núcleos concretos", en mostrar que subsiste alguna cosa, a saber, la forma, y en analizar esa forma, es la condición previa a la constitución de una lógica. Pero correspondería al pensamiento contemporáneo dilucidar el concepto de forma y permitir un mejor análisis de él distinguiendo entre la proposición y su expresión en un lenguaje determinado, lo que llamaremos su formulación[3]. El análisis de la forma se identificará con un estudio sintáctico del lenguaje. La posibilidad de presentar las reglas de deducción como reglas de transformación de las expresiones permite reducir la lógica a la sintaxis del lenguaje[4]. "La lógica de la ciencia no es nada sino la sintaxis del lenguaje científico", escribía **Carnap**[5].

Una concepción semejante debía manifestar su carácter demasiado restrictivo. En el análisis del conocimiento matemático, la toma en consideración de las "interpretaciones", el estudio de los modelos de las teorías formales, en una palabra, las consideraciones semánticas, debían jugar un papel esencial. Además, los conceptos cardinales de la lógica –por ejemplo, la noción de fórmula analítica– no pueden ser definidos como términos exclusivamente sintácticos. **Carnap**, que había defendido la opinión contraria[6], debía reconocerlo ulteriormente. A una fórmula como "Médor es negro o Médor no es negro", cuya analiticidad puede reconocerse en virtud de la significación otorgada a los términos lógicos que en ella figuran, se opone una fórmula como "algún soltero no es casado" que sólo es tenida por analítica en virtud de la significación de los términos descriptivos (soltero, casado) que figuran en ella[7]. La constitución de la lógica exige pues que se salga del marco demasiado estrecho de la sintaxis. Pide la incorporación de una semántica.

Pero ni que decir tiene que esta semántica debe ser formal; entendamos por ello

---

[2] **Carnap** (R.), *L.S.L.*, § 72, p. 279.

[3] En la lengua francesa el término "proposition" designa a la vez una entidad lingüística y la significación expresada por medio de esta entidad. Así, se vacilará en decir si "The sum of 2 and 3 is 5" y "Die Summe von 2 und 3 ist 5" constituyen o no dos proposiciones distintas. Entre los lógicos anglo-sajones, tiende a prevalecer el uso de reservar el término "sentence" para la realidad lingüística y "proposition" para su significación. Introduciremos una distinción análoga y llamaremos "fórmula proposicional" o, más brevemente, "formula", a la expresión de una proposición en un lenguaje determinado. En las traducciones de citas, "sentence" será convertida en una u otra de esas dos expresiones. La confusión con "fórmula", traducida igualmente por "fórmula", no es de temer, ni se daría sino en razón del hecho de que, en las interpretaciones canónicas, las "formulas" son "sentences".

[4] **Carnap** (R.), *L.S.L.*, § 1, pp. 1-2.

[5] *L.S.L.*, § 2, p. 7 y p. 13.

[6] *L.S.L.*, § 1, p. 2.

[7] *M.P.*, § 1.

que se aplica a un lenguaje formalizado y no a un lenguaje natural, que debe dar reglas generales de designación y de verdad, y ser independiente de las significaciones particulares de los términos considerados. A menudo, el dominio de interpretación escogido será, si no formalizado, al menos axiomatizado. Es difícil definir rigurosamente la semática *formal,* pero es fácil describir lo que se designa con este término. Así, la definición del concepto de fórmula realizable en un campo de interpretación, según el procedimiento de **Tarski**, la teoría general de modelos creada por **Kemeny**, el método de los postulados de significación *(meaning postulates),* introducido por **Carnap**, dependen de la semántica formal.

Dado que el lenguaje de la ciencia comprende términos descriptivos, no se podría reducir la lógica de la ciencia a una pura sintaxis; debe utilizar los conceptos y los métodos de la semántica. Llamaremos *epistemología formal* a la aplicación de una lógica así ampliada al conocimiento científico.

El presupuesto de todo positivismo lógico[8] es que el análisis lógico, método único de la filosofía, se aplica a todas las formas del pensamiento humano y basta para resolver todos los problemas que se plantean al respecto. En particular, este método debe aplicarse al conocimiento empírico, tal como aparece en las ciencias inductivas, y mostrar allí su suficiencia. Entendamos por ello que aportará una definición precisa de los conceptos necesarios en toda descripción de estas ciencias y un análisis suficientemente fino de los procedimientos indispensables para su constitución. Llamaremos *lógica inductiva* a esta rama de la epistemología formal que trata del conocimiento experimental; el problema está en saber si una lógica tal puede ser constituida y cómo.

Pero, a fin de evitar todo malentendido, importa precisar lo que se tiene derecho a esperar de una disciplina semejante en cuanto a su contenido. Está claro que, entre el número de los procedimientos que sirven para elaborar el conocimiento experimental, figuran auténticas demostraciones y que ciertas ciencias inductivas alcanzan un nivel de desarrollo suficiente para poder ser presentadas bajo la forma de teorías axiomatizadas. Asimismo, un uso deplorable hace que se hable a veces de lógica inductiva con respecto a lo que no es en realidad más que una aplicación de la lógica deductiva a la ciencia experimental. Conforme a ese uso, dependería de la lógica inductiva el estudio de la derivación de las consecuencias de los principios de una teoría física, bajo el pretexto de que los enunciados en cuestión pertenecen a las ciencias inductivas. Ni que decir tiene que semejante uso del término no tiene más resultados que embrollar los problemas. Sea cual sea el lugar preponderante que juega la deducción en las ciencias experimentales de un alto nivel teórico, estas ciencias requieren otros procedimientos para ser constituidas y son ellos los que, de modo electivo, constituyen el objeto de estudio de la lógica inductiva. Reservaremos pues el nombre de lógica inductiva para el análisis de los pasos estrictamente inductivos, para la definición de los conceptos que no conciernen más que a las

[8] Cf. **Reichenbach** (H.), *A.P.S.*, p. 266: "La filosofía es el análisis lógico de todas las formas del pensamiento humano."

ciencias inductivas, tales como los conceptos de informac ., de predicción, de explicación.

En consecuencia, no nos podemos contentar con identificar el análisis lógico de la física con el estudio de la "sintaxis del lenguaje físico"[9], ni siquiera, para proponer una definición más amplia, con el "análisis formal del lenguaje físico". También es preciso decir lo que se puede esperar de ese análisis. En el umbral de este estudio, es difícil determinar con precisión el minimum requerido para que un análisis formal del conocimiento experimental merezca el nombre de lógica inductiva. Llamar inducción a toda inferencia que vaya de las premisas a conclusiones que lógicamente no se deducen de ellas y asignar a la lógica inductiva la tarea de censar, describir. codificar y, eventualmente, justificar los tipos de inferencias inductivas admitidos en la ciencia sería demasiado impreciso. Es, no obstante, un criterio útil para distinguir los desarrollos que son auténticas lógicas inductivas. Siguiendo a **Nicod,** llamamos *primaria* a la inferencia inductiva que no admite entre sus premisas ninguna proposición obtenida por una inducción anterior; dicho de otra manera, es primaria una inducción que no tiene como premisas más que un número finito de juicios perceptivos (los cuales se expresan mediante fórmulas singulares del lenguaje de observación). Dado que todo nuestro conocimiento de la naturaleza debe partir de ellos, exigiremos de la lógica inductiva que englobe una teoría de la inducción primaria. Será la piedra que toque para juzgar acerca de la pertinencia de los sistemas que estudiaremos. Esta condición puede parecer drástica y, efectivamente, lo será. No es por ello menos legítimo imponérsela a sistemas que encierran el propósito de probar que nuestro conocimiento de la naturaleza no sólo comienza con la experiencia sensible sino que deriva de ella.

En cambio, no hay ninguna razón que justifique que se exija de la lógica inductiva más de lo que puede dar, y lo que no da la lógica deductiva, a saber, un "arte de inventar". En los argumentos que **Whewell** oponía al sistema de **Mill**, se puede encontrar, al lado de objecciones pertinentes, el vestigio de una incomprensión. Una cosa es inventar una hipótesis que da cuenta de los hechos y otra cosa es probarla o mostrar su solidez. La lógica matemática no es una técnica que exima al matemático del espíritu de invención. No es más que un instrumento de análisis de las demostraciones constituidas o constituibles. Ocurre lo mismo con la lógica inductiva. No se podría, sin abuso, estimarla como un método que permitiría inventar el "mejor" sistema de hipótesis para salvar los fenómenos. A lo sumo, permitirá comparar entre sí un conjunto de hipótesis una vez que éstas hayan sido formuladas. **Whewell** está enteramente en su derecho cuando denuncia la ambición, que cree descubrir en **Mill**, de reducir toda la filosofía de las ciencias experimentales a una teoría de la prueba inductiva. No discutiremos que la coligación sea una operación esencial en la construcción de la ciencia. Pero esto no excluye en absoluto, como él parece creer, la posibilidad de una lógica inductiva. Si esta disciplina es imposible, lo es por otras razones. No pediremos a la lógica inductiva que nos "enseñe a inducir", sino que sea

[9] Cf. **Carnap:** *L.S.L.*, § 82, p. 315.

un instrumento satisfactorio en el estudio de las inferencias inductivas efectuadas o efectuables.

Pero ¿cómo concebir este análisis de la inducción? Es difícil responder a esta cuestión sin entrar en la exposición detallada de sistemas complejos. Quisiéramos, sin embargo, indicar sumariamente, aun a costa de imprecisiones, las diferentes formas que puede adoptar, según la naturaleza de los resultados que se intenta establecer.

La lógica inductiva puede presentarse, ante todo, como una doctrina que nos enseña no sólo a discernir, entre las inferencias, aquéllas que son válidas, sino también a establecer su validez o, al menos, a determinar las condiciones de esa validez. Será entonces una teoría de la *prueba* inductiva. Esa es la forma más completa de lógica inductiva. Es también la más conocida porque es así como **Mill** concibe esta disciplina. Pero, ¿qué entender por teoría de la prueba inductiva? Se quiere decir con ello que, admitidos ciertos principios cuya naturaleza está por determinar, sería posible demostrar la verdad de ciertas conclusiones inducidas. Correspondería a la teoría de la prueba inductiva encontrar esos principios y garantizar su verdad. En lo que sigue de esta obra, a esos principios que pueden funcionar de ese modo, como premisas adicionales que permiten deducir ciertas conclusiones inducidas, les reservaremos el nombre de principios de la inducción y entenderemos por "doctrina de los principios de la inducción" la tesis que consiste en afirmar la existencia de tales principios.

Pero la tarea asignada a la lógica inductiva puede ser más restringida. Se le pedirá simplemente que determine con todo rigor un conjunto de reglas inductivas definidas formalmente. Estas reglas se presentan bajo una forma análoga a las reglas de inferencia de la lógica deductiva[10]: "Si se aseveran α_1, α_2, ... α_n, aseverar β", siendo aseveradas las premisas ya porque la experiencia garantiza su verdad, ya porque resultan de aplicaciones anteriores de las reglas inductivas. Pero, ¿hay una diferencia real entre las teorías que determinan principios de la inducción y las que establecen sistemas de reglas inductivas? ¿No es idéntica su relación a la que se da entre cálculos lógicos axiomatizados y sistemas de deducción natural que comportan los mismos conjuntos de tesis? No es exactamente así, y la analogía es engañosa, pues una doctrina de reglas inductivas libera de toda aserción concerniente a la verdad de las conclusiones inducidas y permanece independiente de la determinación de principios de la inducción. Todo lo que se afirma es la conformidad de tal inferencia con una regla determinada. No se dice que un sistema de reglas sea lógicamente equivalente a un conjunto de principios de la inducción. Por supuesto, de un conjunto de principios puede derivarse un conjunto de reglas que consistirán precisamente en aseverar, cuando se establecen ciertas premisas, las proposiciones que pueden concluirse de esas premisas y de los principios. Pero la posibilidad de la derivación in-

[10] Pero, bien entendido, no se puede establecer que las conclusiones son lógicamente válidas cuando las premisas lo son.

versa no está garantizada en absoluto. Las reglas inductivas pueden ser formuladas de tal manera que su campo de aplicación sea mucho más restringido que el que nos gusta asignar a los principios.

Por último, se puede pedir simplemente a la lógica inductiva que contribuya al análisis epistemológico de las ciencias inductivas aportando una definición de los conceptos indispensables para describir su estructura. Tales son los conceptos de ley, teoría, explicación, predicción, confirmación, que llamaremos conceptos estructurales, siguiendo a **Scheffler**[11]. En rigor, esos conceptos no aparecen en los enunciados constitutivos de las ciencias inductivas. No son por ello menos necesarios para su inteligibilidad y no hay apenas memorias científicas que no los utilicen, no siendo jamás independiente de una teoría de ese saber[12] la construcción del saber científico. La lógica inductiva tendría la obligación de explicarlos por las vías que le son propias, es decir, de derivarlos de los conceptos fundamentales del análisis formal. Así podrían discriminarse los usos lícitos de esos conceptos y podría constituirse una teoría general de la estructura de la ciencia.

A través de esta distinción de varias formas de lógica inductiva, se adivinan las divergencias concernientes a la función que se le atribuye y al alcance que place reconocerle. Se puede concebir que su papel sea simplemente codificar las prácticas inductivas legítimamente admitidas en los medios científicos o pedirle que las legitime. La primera solución no carece de crédito en la escuela positivista. Se discutirá al epistemólogo el derecho a poner en cuestión las reglas admitidas por el hombre de ciencia. Su única misión será explicitarlas, brindar una formulación estricta de ellas. El solo hecho de que sean admitidas en la práctica científica constituye por sí mismo una justificación: "Los cánones de la inducción son válidos si son la expresión exactamente codificada de los usos inductivos recibidos", escribe **Goodman**[13]. Para justificar esa actitud, se afirmará que ocurre lo mismo en lógica deductiva y que los principios de esta ciencia se justifican por su conformidad con los usos deductivos recibidos y no "porque se deduzcan de algún axioma evidente en sí" o "estén fundados en la naturaleza misma del espíritu humano". **Reichenbach** y **Carnap** adoptan, al menos parcialmente, esta concepción. De modo general, el primero da por función al epistemólogo la de proceder a una "reconstrucción racional" del pensamiento científico[14]. El segundo, al comienzo de su obra fundamental consagrada a la lógica inductiva probabilitaria, anuncia que uno de sus fines esenciales es proceder a una "explicación" del concepto pre-científico de grado de confirma-

[11] *A.S.*, p. 12.

[12] Del mismo modo que un tratado de matemáticas comprende esencialmente un discurso que pertenece a la metamatemática, una obra de física comprende un número más o menos grande de frases que pertenecen a la descripción estructural del conocimiento científico. Para convencerse de ello, basta, por ejemplo, con remitirse al excelente análisis textual del principio de la famosa memoria de **Einstein:** *Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimimiento,* que ofrece **Carnap** (Cf. *L.S.L.*, § 85, pp. 329-330).

[13] *F.F.F.*, p. 67, citado y traducido en **Scheffler** (I.), *A.S.*, p. 248.

[14] *E.P.*, § 1, pp. 5 y sig.

ción, a clarificarlo. Concibe la lógica inductiva como una formalización de las prácticas inductivas corrientes que constituirán la materia de ella, la teoría ingenua por formalizar[15].

Pero se puede ser más exigente y pedir que, de algún modo, la lógica inductiva "legitime" los procedimientos inductivos admitidos en la ciencia. ¿Cómo concebir esa justificación? La forma más fuerte consistirá en establecer que ciertas inferencias inductivas no pueden llevar a la aserción de proposiciones falsas. Es lo que se obtendría en las teorías de la prueba inductiva, a reserva de que se establezca la verdad de los principios de la inducción. Pero es posible que se pida simplemente que las conclusiones sean probables, o más probables que otras conclusiones; o bien se puede mostrar que tal principio, que parece conforme a una exigencia de la razón, impone la elección de tal regla inductiva, o que un procedimiento inductivo determinado corresponde a la "mejor" estrategia que podamos adoptar. En suma, el sentido dado a la idea de justificación variará hasta el infinito, sobre todo si se tienen en cuenta formulaciones fugaces.

Por regla general, las lógicas inductivas que apuntan a la determinación de principios revelan la intención de justificar los procedimientos inductivos, mientras que no ocurre lo mismo con las de los otros dos tipos. Pero esta regla admite múltiples excepciones, tanto más cuanto que tal autor, que comienza proclamando que no se preocupa más que de codificar los procedimientos inductivos corrientes, acaba por experimentar la necesidad de legitimarlos, mientras que tal otro, que se propone legitimarlos, a falta de llegar a ello, invoca a título de justificación el hecho de que son conformes a la práctica científica efectiva.

Pero, más allá de todas las divergencias, hay una oposición radical entre dos tipos de lógicas inductivas. Hay aquéllas que no apelan al concepto de probabilidad para formularse y aquéllas que sí apelan. Llamaremos clásicas a las primeras y probabilitarias a las segundas. Aún es necesario precisar un punto fundamental para dar un sentido exacto a esta distinción. Para que una lógica merezca el calificativo de probabilitaria, es preciso que se afirme que el concepto de probabilidad que utiliza tiene alguna relación con la noción matemática de probabilidad. Cuando **Cournot** insistía acerca de la diferencia radical entre la probabilidad matemática y la probabilidad que llamaba filosófica y sostenía que una teoría de la inducción no tiene nada que hacer sino con la segunda, el sistema que constituía no podía ser tenido por una lógica probabilitaria[16]. En términos precisos, exigiremos que la noción de probabilidad utilizada satisfaga, si no todos los axiomas que permiten definir una probabilidad matemática, al menos algunos de ellos. Indagaremos más adelante cuál es el mínimo requerido en la materia.

Esta obra está consagrada al examen de las lógicas inductivas probabilitarias. La

[15] *L.F.P.*, § 1 a 3, pp. 1 a 8; y § 8, pp. 19-23. Ver igualmente, *Ibid.*, App., § 100-J, páginas 576-577 e *I.L.*, § 16.

[16] Por lo demás, no es ni siquiera una lógica inductiva *stricto sensu.*

constitución de sistemas de este tipo ha estado motivada por la constatación de la insuficiencia de las lógicas inductivas clásicas. Por eso juzgamos necesario mostrar, en un primer capítulo, sus debilidades radicales. Esa empresa ha sido alentada por el desarrollo del cálculo de probabilidades, porque se ha creído ver en las teorías modernas de la inferencia estadística una ciencia que, de alguna manera, presentaría una lógica inductiva enteramente constituida cuya explotación epistemológica sería obvia. Según nuestro parecer, no ocurre nada de eso y nos será preciso probar que las teorías de la inferencia estadística no constituyen una lógica inductiva en el sentido estricto que hemos dado a este término. Nos quedará entonces por mostrar, al final de esta primera parte, cuáles son las tareas que debe cumplir una lógica inductiva probabilitaria.

CAPITULO II

MISERIA DE LA LOGICA INDUCTIVA CLASICA

Durante largo tiempo, se ha asignado como fin a la lógica inductiva el de determinar y fundamentar los principios de la inducción. Esos principios, utilizables a título de premisas adicionales, debían bastar para poner bajo una forma lógicamente válida todas las inducciones necesarias para la constitución del conocimiento científico. Hubiera debido saltar a la vista el carácter ilusorio de este ideal. Supongamos que sea realizable; se seguiría de ahí que las proposiciones de las ciencias experimentales serían ciertas, lo cual no ocurre. A pesar de la evidencia de esta conclusión, se ha intentado constituir teorías de la prueba inductiva y, ante las dificultades encontradas, se ha preferido disimular la amplitud del descalabro sufrido, tan fuerte es el apego a la idea de una ciencia apodíctica.

El fin de este capítulo es mostrar la miseria radical de las lógicas inductivas clásicas. No son únicamente las teorías de la prueba inductiva las que fracasan, sino también empresas cuyos objetivos son más limitados y que, en consecuencia, podían parecer más sanas. He ahí lo que queremos establecer.

1. La prueba inductiva y las técnicas de eliminación

No se trata de hacer la crítica del *Sistema de lógica deductiva e inductiva.* Pero es preciso determinar la significación del fracaso de la empresa de **Mill**. ¿Muestra la imposibilidad de toda lógica inductiva de tipo clásico?

Habiendo definido la inducción como "el procedimiento por el cual concluimos que lo que es verdad de ciertos individuos de una clase es verdad de la clase entera, o que lo que es verdad algunas veces lo será siempre en circunstancias semejantes"[1], **Mill** asigna como tarea a la lógica inductiva la de ser una teoría de la prueba: Su objeto es determinar cuáles son las inducciones ciertas y universales. Que las haya de este tipo es, en su opinión, la condición de posibilidad de una lógica de la inducción[2]. Pero para que ello sea así, también es necesario que la conclusión de una inferencia inductiva se deduzca de las premisas. **Mill**, tradicionalista en la materia,

[1] *L.D.I.*, L. 3, cap. 4 § 3, p. 365.
[2] *Ibid.* L. 3, cap. 2 § 1, p. 324.

cree que toda deducción es de tipo silogístico[3]. Por eso pretende que la inducción pueda ponerse en forma silogística. Se trataría simplemente de restaurar la mayor para dar certeza a las conclusiones inducidas[4]. Estamos pues en presencia de un ferviente defensor de la doctrina de los principios de la inducción. Se sabe cómo la afirmación de "la uniformidad del curso de la naturaleza" constituye, a los ojos de nuestro autor, "el principio fundamental, el axioma general de la inducción"[5].

La crítica se ha encarnizado contra las irrisorias pruebas que propone **Mill** para conferir certeza a este principio. Es lamentable que haya prestado menos atención a la estructura lógica de los métodos que intenta fundar sobre su uso. Retomando de **Bacon** la crítica de la inducción por enumeración simple, **Mill** ha querido dar forma a los métodos baconianos de inducción por eliminación. Piensa construir así una teoría de lo que hemos llamado inducción primaria. Por supuesto, las pruebas son imperfectas y los resultados a veces erróneos. El pensamiento de **Mill** no es ni un modelo de rigor ni un ejemplo de precisión. Pero se trata de saber si la falta de certeza de los resultados se debe a la insuficiencia del análisis o a una limitación radical del método empleado. Se ha querido ver una razón del fracaso de **Mill** en los problemas que suscita la pluralidad o la complejidad de las causas. Es preciso reconocer que **Mill** no propone más que soluciones insuficientes cuando toma en consideración esas eventualidades. Pero es fácil corregirlo en ese punto y mostrar así que las causas reales de su fracaso están en otra parte. Ese resultado es importante, ya que impide atribuir el fracaso de **Mill** a la insuficiencia del análisis técnico, es decir, a una causa menor, y lleva así a poner en evidencia una limitación radical del método que emplea.

El objeto de las pruebas de **Mill** es restringido. No deben justificar más que las inferencias inductivas de un tipo particular: Se trata de determinar la causa de un fenómeno observable. Se supone implícitamente que esta causa es directamente accesible a la observación. **Mill** entiende por causa "la suma de las condiciones positivas o negativas tomadas conjuntamente, el total de contingencias de toda naturaleza que, al ser realizadas, el consecuente se sigue invariablemente"[6]. La causa de un fenómeno es, pues, el conjunto de fenómenos que constituye una condición suficiente de su producción. En cuanto a la relación temporal de la causa y del efecto, simplemente se exige que la causa no siga al efecto. Nada impide que sea contemporánea de él[7]. El campo de aplicación de los famosos métodos no se limita pues a las leyes de sucesión. Puede incluir las "uniformidades de coexistencia". Poco importa, para nuestro propósito, que **Mill** dé a menudo un sentido temporal a los términos

---

[3] "Lo que no es reductible al silogismo no es un razonamiento", escribe (*Ibid.*, L. 3, cap. 9, § 6, p. 480). De ahí el detestable tratamiento de la lógica de relaciones que propone. (*Ibid.*, L. 1, cap. 2 § 7, p. 43 y sig.)

[4] *Ibid.*, L. 3, cap. 3, § 1, pp. 248-249.

[5] *Ibid.*, L. 3, cap. 3, § 1, p. 348.

[6] *Ibid.*, L. 3, cap. 5, § 3, p. 375.

[7] *Ibid.*, L. 3, cap. 5, § 6, p. 384.

"antecedente" y "consecuente". En cambio, lo que cuenta es el hecho de que la presencia o la ausencia de la causa o del efecto son fenómenos observables.

Restrinjamos, tanto como se pueda, las ambiciones de la demostración, siguiendo en eso el ejemplo de autores que han estudiado la lógica de **Mill**. Le daremos así las más grandes posibilidades de éxito. Supongamos que A y B son predicados monádicos de observación y que hemos de probar la ley siguiente: todo objeto que posee el atributo B posee también el atributo A; en otros términos: "ser un B" es una condición suficiente de "ser un A", lo que se escribe $(x)(Bx \supset Ax)$". Dado que se trata de una uniformidad de coexistencia, se puede vacilar en calificar a B como causa de A, pero poco importa. Estamos en presencia de un tipo de ley universal lo más simple posible. Si los métodos de **Mill** deben permitir concluir en otros casos, deben permitir concluir aquí. Ahora bien, ¿cómo probar la certeza de una ley de este tipo?

Excluido el método de las variaciones concomitantes, que naturalmente no se aplica en el caso presente[8], todos los métodos de **Mill** repiten el siguiente esquema: Se supone que, en una familia finita de predicados monádicos de observación $(B_i)_{i \in I}$, hay al menos una condición suficiente de A. En otros términos, una de las leyes $(x)(B_i x \supset Ax)$ es verdadera. Se puede, por eliminación, excluirlas a todas excepto a una, a la cual se le conferirá, por tanto, certeza. En efecto, sea a un objeto; si $(x)(B_i x \supset Ax)$ es verdadera, no se puede tener a la vez $B_i a$ y $\sim Aa$. Supongamos que la observación nos aporta la prueba de la verdad de esas dos proposiciones singulares, concluiremos de ello la falsedad de esa ley. El azar, si somos lo bastante afortunados, o una experimentación bien llevada, si estamos equipados suficientemente, pueden permitirnos afirmar la verdad de una ley si todas las otras han sido eliminadas.

El interés de estos métodos ha sido discutido bajo el pretexto de que corresponden exclusivamente a casos artificiales que el análisis científico no encuentra nunca. **Mill**, se dice, supone que un fenómeno no tiene más que una causa y que esta causa es simple. Hipótesis inadmisibles, dado que la mayoría de los fenómenos tienen causas múltiples y algunas de ellas son complejas. En el caso presente, nada impide que varios predicados de la familia $(B_i)_{i \in I}$ sean condiciones suficientes; que se tenga, por ejemplo $(x)[(B_i x \supset B_j x) \supset Ax]$, lo que viene a ser la aserción conjunta de las dos leyes $(x)(B_i x \supset Ax)$ y $(x)(B_j x \supset Ax)$. Por otra parte, la posibilidad de las causas complejas implica, *ipso facto*, la pluralidad de causas. Si B_i es causa de A, para todo j (con $j \in I$ y $j \neq i$), $(B_i \,\&\, B_j)$ será causa de A. Así razona **Nicod**[9], quien demuestra que la pluralidad de causas impide al método de eliminación llegar a su término: si hay pluralidad de causas, se permanecerá en presencia de una pluralidad de leyes sin saber si son todas verdaderas o si sólo lo son algunas, y cuáles[10].

---

[8] Para ser aplicado, exige que figuran en la expresión de las leyes, si no funtores numéricos, al menos predicados comparativos que expresen relaciones de orden.

[9] P. L. I., p. 32.

[10] *Ibid.*, p. 31.

Creemos que esta conclusión es abusiva. Ciertamente, lo expuesto por **Mill** es, a menudo, ambiguo. Su autor cede al mito de la unicidad de la causa y está dispuesto a creer que es posible establecer, entre el conjunto de los antecedentes y el conjunto de los consecuentes, esa correspondencia biunívoca que es el único fundamento del método de los residuos. Las notaciones escogidas para exponer los métodos revelan esta creencia[11]. Pero la existencia de causas complejas no está excluida, en el sentido de que, entre las causas posibles, figuran circunstancialmente fenómenos complejos, como lo manifiestan los ejemplos con los que **Mill** ilustra sus famosos métodos[12]. Además, el problema de la pluralidad de las causas es explícitamente tratado por **Mill**, quien señala que convierte en inoperante el método de concordancia: Si A' puede tener varias causas, constatar que A' está precedido, por una parte, de *A, B, C* y, por otra, de *A, D, E,* no basta para probar que *A* sea causa, pues *C* y *E,* por ejemplo, pueden ser sus causas[13]. Pero el método de diferencia podrá eliminarlos. Es verdad que, si la causa es compleja en el sentido de que supone la conjunción de varios de esos antecedentes distinguidos y designados por mayúsculas, ningún método es concluyente, como notará **Broad**[14].

Sin duda, los resultados de **Mill** son insuficientes, pero los problemas planteados por las causas complejas o múltiples no son ignorados. Contra la opinión de **Nicod**, creemos que es posible presentar las técnicas de eliminación de tal manera que se tengan perfectamente en cuenta esas eventualidades. Los resultados serán, si no idénticos a los que se obtienen cuando se excluyen, al menos análogos. Las hipótesis necesarias para concluir serán un poco más fuertes, pero de ningún modo desproporcionadas con respecto a las que hace **Mill**. Siguiendo de cerca los bellos análisis de Von **Wright**[15], contentándonos con utilizar una terminología un poco diferente, con modificarlos en algunos puntos menos importantes y con reducirlos a lo esencial, vamos a retomar el problema, no bajo la forma demasiado general que le da **Mill**, sino restringiéndolo al caso de las leyes del tipo considerado anteriormente.

El tratamiento riguroso y rápido de la cuestión supone el uso de los conceptos lógicos definidos en el apéndice 1. Las leyes a probar, lo mismo que las proposiciones de observación que las confirman, se expresan en forma de fórmulas de un sistema semántico de orden 1 con un solo tipo de variables individuales. No contienen

---

[11] Tantos antecedentes, que designan las mayúsculas, como consecuentes designados por minúsculas.

[12] En un ejemplo, uno de los antecedentes, que se revelará como causa, es "el contacto de un compuesto metálico con una sustancia orgánica" (*Ibid.*, L. 3, cap. 8 § 1, p. 425); en otro, "el contacto de una sustancia alcalina y un aceite" (*Ibid.*, L. 3, cap. 8, § 1, p. 425). Lo que se puede reprochar a **Mill** no es la restricción del campo de aplicación de sus métodos, sino el carácter latitudinario de las modalidades de su aplicación.

[13] *L.D.I.*, L. 3, cap. 10, § 2, pp. 495-486. Se vuelve a encontrar ese razonamiento bajo la pluma de von **Wright** (*L.P.I.*, cap. 4, § 5, pp. 73-74) quien amonesta a **Mill**, como si este autor no hubiera tenido consciencia de la objección que podía hacérsele y no hubiera pensado que podía haber pluralidad de causas.

[14] *P.D.I.*, § 6.

[15] *T.I.P.*, cap. 3 y 4, pp. 63 a 128, y *L.P.I.*, cap. 4, pp. 54 a 84.

más que predicados monádicos de observación. Utilizaremos, por otra parte, la terminología de las funciones booleanas (ver *Apéndice* 2), escribiendo como "$g \subset f$" la ley $(x)(gx \supset fx)$. Nos es preciso, por otra parte, definir los conceptos de condición suficiente y condición necesaria. Adoptaremos las definiciones siguientes: (Designando naturalmente "*f, g, h*", etc..., funciones booleanas de predicados monádicos):

D. 1: g es *condición suficiente* de f, si $g \subset f$ es empíricamente verdadera.

D. 2: g es *condición necesaria* de f, si $f \subset g$ es empíricamente verdadera.

Está claro que toda fórmula del tipo $g \subset f$ que sea lógicamente verdadera es por necesidad empíricamente verdadera. Así pues todo predicado g tal que $\vdash g \subset f$ es una *condición suficiente* de *f;* se tiene un resultado semejante respecto a las condiciones necesarias. En particular, los dos predicados derivados $\overline{0}$ y $\overline{1}$ son, respectivamente, condición suficiente y condición necesaria de todo predicado. Será conveniente excluir esos casos triviales en lo que sigue de este desarrollo. Enunciemos desde ahora un cierto número de teoremas útiles. Son las traducciones inmediatas de tesis elementales del cálculo de predicados; por eso los daremos sin demostración:

T. 1: Si g es condición suficiente de f y si $\vdash g' \subset g$, entonces g' es condición suficiente de f[16].

T. 2: Si g es condición necesaria de f y si $\vdash g \subset g'$, entonces g' es condición necesaria de f.

T. 3: Si g es condición suficiente de f y si g' es condición necesaria de f, entonces $g \subset g'$ es empíricamente verdadero.

T.4: Sea $(g_i)_{i \in I}$ una familia finita de condiciones suficientes de f, $\bigvee_{i \in I} g_i$ es una condición suficiente de f.

T.5: Sea $(g_i)_{i \in I}$ una familia finita de condiciones necesarias de f, $\bigwedge_{i \in I} g_i$ es una condición necesaria de f.

T. 6: Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole finita de predicados monádicos. Todo predicado monádico f tiene en $\mathcal{A}$ una condición suficiente más grande y una condición necesaria más pequeña.

Demostración: f tiene en $\mathcal{A}$ una condición necesaria (a saber, $\overline{0}$) y una condición suficiente (a saber, $\overline{1}$). Consideremos el conjunto no vacío de las condiciones suficientes de f que son elementos de $\mathcal{A}$. Su reunión es condición suficiente de f (en virtud de T. 4) y es necesariamente la condición suficiente más grande de f en $\mathcal{A}$. Se concluye asimismo que la intersección de las condiciones necesarias de f en $\mathcal{A}$ es la condición necesaria más pequeña en $\mathcal{A}$. Además, está claro que la condición suficiente mayor está contenida en la condición necesaria más pequeña.

---

[16] Este teorema resulta inmediatamente de la transitividad de la inclusión: De $(g' \subset g)$ y de $(g \subset f)$, se concluye $(g' \subset f)$. Notemos que, al no ser más que una ley empírica una de las premisas, ocurre lo mismo con la conclusión.

Podemos ahora resolver el problema planteado. Hagamos notar que no hay ninguna razón para limitarse, como hace **Mill**, a la investigación de condiciones suficientes únicamente; la determinación de las condiciones necesarias es un problema rigurosamente paralelo al precedente. Hemos de tomar en consideración la posibilidad de causas complejas o múltiples, pero está claro que el método eliminatorio exige, para ser aplicado, que el conjunto de las causas posibles sea finito. Por eso supondremos que esas causas no dependen más que de un número finito de factores; en términos precisos: que pertenecen a la clausura booleana de una familia finita de predicados. ¿Es excesiva esta hipótesis? En modo alguno; en el caso simple tratado por **Mill**[17], era necesario ya limitar las condiciones suficientes posibles a un conjunto finito de predicados.

Pero ni que decir tiene que el problema de la búsqueda de las condiciones necesarias o suficientes sólo tiene sentido si no existe ninguna vinculación lógica entre causa y efecto: Lo que se quiere determinar son leyes empíricas y no verdades lógicas que podrían concluirse de las solas reglas de interpretación de predicados en presencia o no de los axiomas del cálculo de predicados. Incluso si no está explícitamente formulada, esta exigencia se supone siempre, tácitamente, satisfecha. Es tan necesaria en el caso simple como en el caso complejo. Pero en la segunda circunstancia es un poco más difícil de formular, como vamos a ver.

Sea A un predicado monádico de observación y $(B_i)_{i\in I}$, una familia finita de predicados monádicos de observación. Se supone a A no sólo *lógicamente independiente* de los B_i –lo que quiere decir que no es una función booleana de ellos–, sino *lógicamente totalmente independiente,* lo que constituye un requisito más fuerte. A es lógicamente totalmente independiente de los B_i si la interpretación de esos predicados no trae aparejada la verdad lógica de una fórmula que vincule A con los B_i que no sería lógicamente verdadera en el caso en que se escogieran otras reglas de interpretaciones para A[18]. Esta condición puede expresarse así: entre las ecuaciones que ligan A a los B_i, únicamente son lógicamente verdaderas las que se deducen, por la teoría de las álgebras de **Boole**, de los postulados de significación que conciernen a los predicados de la familia $(B_i)_{i\in I}$ (y no a A), entre los cuales figuran naturalmente todos los teoremas de las álgebras de **Boole**. ¿Es necesario ir más lejos y suponer a los (B_i) independientes los unos de los otros? Parece que muchos autores admiten esta condición, pero no vemos ninguna razón para introducirla. Dado que excluimos la posibilidad de que los (B_i) estén ligados por ecuaciones booleanas, puede que la

[17] Llamamos caso simple a aquél donde se excluyen la pluralidad y la complejidad de las causas.

[18] Von **Wright** (*T.I.P.*, cap. 3, § 2, p. 76) demuestra la necesidad de esta condición. Supongamos que la familia (B_i) se reduce al predicado único B y que B es interpretado de la manera siguiente: "x es un B si y sólo si x es un A y si es el enésimo caso de A enumerado según un cierto modo de enumeración. Está claro que se tiene entonces $\vdash B \subset A$ y que B **es condición suficiente** de A. Pero A no es función booleana de B. La independencia lógica total de A respecto a los (B_i) debe ser requerida precisamente para excluir tales contingencias que conducen a soluciones triviales.

vacuidad de ciertos predicados Q definidos a partir de los (B_i) sea una verdad lógica[19]. Naturalmente, si esas ecuaciones definieran explícitamente ciertos (B_i) en función de otros, sería posible y más cómodo limitarse a los primeros y eliminar los predicados "derivados"; pero esto no ocurre siempre. Al no imponer ninguna condición al conjunto de predicados a partir de los cuales se definen las "causas" posibles, damos al método más flexibilidad y, en particular, podemos aplicarlo en el caso en que la interpretación de los (B_i) excluya ciertas funciones booleanas como "desprovistas de significación empírica"[20].

En el caso simple era necesario, para concluir, no suponer el determinismo, es decir, la existencia de una condición suficiente de todo predicado, sino admitir un postulado a la vez más fuerte y más débil: Se suponía que A tenía una condición suficiente en el conjunto determinado y finito $(B_i)_{i\in I}$. Esta afirmación es más débil que la simple aserción del determinismo, en el sentido de que no atañe más que al predicado A; pero es más fuerte, puesto que se requiere que la condición suficiente de A pertenezca a un conjunto finito especificado. Aquí pediremos que las condiciones necesarias o suficientes de A, cuya pluralidad y complejidad no se excluyen, pertenezcan a la clausura booleana de una familia finita de predicados monádicos: $(B_i)_{i\in I}$. Pero a esta hipótesis se le pueden dar varias formas más o menos fuertes: Son las siguientes:

D. 3: A está *parcialmente determinado en cuanto a las condiciones suficientes* con *respecto a* $(B_i)_{i\in I}$, si existe en (B_i) al menos una condición suficiente distinta de $\overline{0}$.

D. 4: A está *parcialmente determinado en cuanto a las condiciones necesarias* con *respecto a* $(B_i)_{i\in I}$, si existe en $(\overline{B_i})$ al menos una condición necesaria distinta de $\overline{1}$.

D. 5: A está *simplemente determinado* con *respecto a* $(B_i)_{i\in I}$, si está a la vez parcialmente determinado en cuanto a las condiciones suficientes y en cuanto a las condiciones necesarias con respecto a este conjunto.

D. 6: A está *totalmente determinado* con respecto a la familia $(B_i)_{i\in I}$, si existe en la clausura booleana de esta familia una condición a la vez necesaria y suficiente.

Recordemos que los predicados Q definidos a partir de los elementos de una familia finita $(B_i)_{i\in I}$ constituyen los átomos de su clausura y que todo elemento de esta clausura se escribe bajo la forma de una reunión de átomos.

---

[19] Por ejemplo (B_i) es el conjunto $\{B_1, B_2, B_3\}$; los predicados Q están enumerados en el orden canónico. La interpretación propuesta conduce a la relación $\vdash [B_3 \subset (B_1 \vee B_2)]$. Se excluye, pues, que para un a cualquiera se tenga $(\sim B_1\, a \,\&\, \sim B_2\, a \,\&\, B_3\, a)$. En otros términos, Q_7 es lógicamente vacío. Si se hubiera puesto $\vdash (B_1 \supset B_2)$, habrían sido excluidos los predicados Q_3 y Q_4, cuya vacuidad lógica quedaría establecida.

[20] Demos un ejemplo: B_1 es interpretado como "ser un ácido", B_2 como "ser un hidrácido". Ni que decir tiene que un cuerpo que no es un ácido no es un hidrácido. En virtud de las reglas de significaciones, el predicado $(\sim B_1 \,\&\, B_2)$ es lógicamente vacío).

Supongamos a A parcialmente determinado, en cuanto a las condiciones suficientes, con respecto a $(B_i)_{i\in I}$, del cual es totalmente independiente lógicamente. El problema es determinar la mayor condición suficiente de A en $(B_i)_{i\in I}$. Se excluyen primeramente los predicados Q lógicamente vacíos. Supongamos que se observa a un indivíduo que es un Q_j pero que no es un A. Así se podrá, no determinar la condición suficiente máxima, sino fijar un mayorante de esta condición suficiente[21]. ¿Puede la experiencia invalidar la hipótesis formulada a propósito del determinismo de A? Sí, si lleva a excluir todos los átomos, es decir, a identificar la condición suficiente máxima con $\overline{\mathrm{O}}$.

Asimismo supongamos a A parcialmente determinado, en cuanto a las condiciones necesarias, con respecto a una familia $(B_i)_{i\in I}$. Si se observa un objeto que es un A y un Q_k, Q_k está incluído en la condición necesaria de A. Así somos llevados a determinar un minorante de la condición necesaria mínima[22]. Aquí también la experiencia puede invalidar la hipótesis establecida si obliga a incluir todos los predicados Q no vacíos lógicamente, es decir, a identificar la condición necesaria mínima con $\overline{\mathrm{I}}$. En la hipótesis del determinismo simple, se determina simultáneamente la mayor condición suficiente y la menor condición necesaria; circunstancialmente se tiene en cuenta el hecho de que la primera debe estar incluída en la segunda.

Supongamos ahora a A totalmente determinado con respecto a $(B_i)_{i\in I}$. En este caso, se puede fijar su condición necesaria y suficiente. Si un objeto es un A y un Q_j, Q_j forma parte de la condición necesaria y suficiente de A; si es un Q_k sin ser un A, Q_k no está incluido allí. Para cada uno de los predicados Q_i, basta con observar un objeto que tenga esta propiedad y observar si es o no un A para que la condición necesaria y suficiente de A sea perfectamente determinada[23]. Naturalmente, la hipótesis del determinismo total de A quedaría invalidada por la experienci si estuviéramos en presencia de dos objetos que son Q_i y de los cuales uno es un A, mientras que el otro no lo es.

La pluralidad y la complejidad de causas no modifican pues fundamentalmente los problemas de la prueba por eliminación. La hipótesis del determinismo parcial es más débil que la que formula **Mill**: la existencia de una condición suficiente en una

[21] Por ejemplo, (B_i) es el conjunto $\{B_1, B_2, B_3\}$, las reglas de interpretación de los predicados llevan a la relación $\vdash (B_3 \subset (B_1 \vee B_2))$. Q_7 es, por tanto, vacío. Nos ceñiremos al álgebra engendrada por los otros átomos. Supongamos que se hayan observado 4 objetos, designados respectivamente por a, b, c, d. Los protocolos de observación son los siguientes:

$$B_1a \,\&\, \sim B_2a \,\&\, B_3a \,\&\, Aa$$
$$\sim B_1b \,\&\, B_2b \,\&\, \sim B_3b \,\&\, Ab$$
$$\sim B_1c \,\&\, B_2c \,\&\, \sim B_3c \,\&\, \sim Ac$$
$$\sim B_1d \,\&\, \sim B_2d \,\&\, \sim B_3d \,\&\, \sim Ad.$$

En otros términos, se tiene:
$Q_3a \,\&\, Aa$, $Q_6b \,\&\, Ab$, $Q_6c \,\&\, \sim Ac$, $Q_8d \,\&\, \sim Ad$. La observación de c y de d lleva a excluir que Q_6 y Q_8 sean condiciones suficientes. Estando excluido Q_7 porque es lógicamente vacío, la condición suficiente máxima debe estar contenida en $(Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3 \vee Q_4 \vee Q_5)$.

[22] En el ejemplo precedente, $(Q_3 \vee Q_6)$ es un minorante de la condición necesaria mínima.

[23] Naturalmente, se precisan al menos tantas observaciones como predicados Q hay.

familia finita de predicados (y no en su clausura booleana). El resultado obtenido es también más débil, pero no es despreciable en modo alguno. En cuanto a la hipótesis del determinismo total, permite concluir con certeza respecto a la condición necesaria y suficiente de un predicado. Pero, ¿no es necesario decir, con **Nicod**, que "postular de antemano que un carácter *A* admite una condición única, a la vez necesaria y suficiente, es una asunción bien osada"[24]? Ciertamente la hipótesis sería inadmisible si por "condición única" fuera preciso entender una causa que no sería ni compleja, ni múltiple, en otros términos, una causa a buscar en el conjunto de los predicados fundamentales. Pero no ocurre lo mismo si se designa por ello una función booleana cualquiera de los predicados del conjunto de base. La hipótesis que se formula entonces es más fuerte que el mero determinismo parcial, pero no existe entre los dos ninguna desproporción. Concluyamos pues: Si se formulan las hipótesis adecuadas, los métodos de prueba por eliminación son concluyentes incluso en el caso en que haya pluralidad o complejidad de causas.

Pero el verdadero problema permanece: ¿Se pueden encontrar principios universales que garanticen la verdad de las hipótesis necesarias para concluir en cada caso particular? Ahora bien, ya sea que se contemple el caso simple, o que se tome en consideración el caso complejo, como hemos hecho, la respuesta es idéntica: Es negativa.

El célebre principio del determinismo no puede bastar para concluir. Por supuesto, sin la creencia de que las causas buscadas existen, su búsqueda sería absurda. En ese sentido, el determinismo está presupuesto por las pruebas eliminatorias. Pero no basta con afirmar que *A* está determinado –o totalmente determinado– para fundamentar las técnicas de eliminación. También es preciso fijar el conjunto *B* de los predicados que constituyen ya sea las causas posibles, ya sea la base del álgebra en la que se encuentran. La limitación del conjunto con respecto al cual está determinado *A* es la que plantea problemas. Aquí no es de ninguna ayuda el principio del determinismo. Lo que se necesita es un "principio de selección", según la expresión de Von **Wright**[25]. Excluir ciertas propiedades que, por naturaleza, no podrían ser causas; hablar, por ejemplo, como se ha hecho[26], de la irrelevancia de la posición espacio-temporal no es suficiente: Nada asegura que las propiedades no eliminadas constituyan un conjunto finito. ¿Es preciso suponer que un objeto no tiene más que un número finito de "cualidades"? Este principio es sospechoso y de ningún modo concluyente: En realidad, entre los predicados que pueden ser causas figuran nombres de propiedades que expresan relaciones entre un objeto y su entorno y es insensato suponer que su número sea finito.

Falta por invocar el postulado de la variedad limitada introducido por **Keynes**[27] para demostrar su célebre teorema de la confirmación, del que hablaremos más ade-

[24] *P.L.I.*, p. 34.
[25] *T.P.I.*, cap. 5, § 1, p. 130.
[26] *T.P.I.*, cap. 5, § 3, p. 138.
[27] *T.P.*, cap. 22, p. 258.

lante. Ese postulado vuelve a suponer que no hay más que un número finito de propiedades lógicamente independientes. Asegura así que *todos* los predicados están determinados con respecto a un mismo conjunto finito. Ciertamente, complace a la razón suponer que, en el universo, el número de propiedades indendientes no es infinito, dicho de otra manera, que la naturaleza no es un caos. Pero, por sugestiva que sea esta hipótesis, es insuficiente: Pues aún sería preciso saber cuáles son esas propiedades "generatrices" y no simplemente estar seguro de su existencia. Añadamos que es improbable que puedan ser buscadas entre los predicados de observación. Es necesario, pues, concluir: No ha sido propuesto ningún principio que funde las inducciones del tipo que hemos considerado.

Es claro que las conclusiones que hemos obtenido en el caso de las leyes más simples se aplican *a fortiori* a otros tipos de leyes. Valen para todas las fórmulas de las que pueda efectivamente concluirse una ley del tipo considerado. Se puede establecer muy simplemente que figura entre ellas una amplísima clase de fórmulas del lenguaje de observación[28]. En cuanto a las fórmulas de los lenguajes teóricos, no se confirman más que por las consecuencias que se extrae de las mismas. Entre ellas figuran ordinariamente implicaciones universales del lenguaje de observación. En todo caso, si existieran principios que hicieran concluyente la prueba por eliminación, esos principios bastarían *ipso facto* para convertir en ciertas las leyes del tipo que hemos considerado, lo cual no sucede.

El interés de los métodos de **Mill** se debe a que se presentan como una teoría de la inducción primaria. Su fin es dar certeza a ciertas leyes universales desde el momento en que estamos en posesión de ciertas observaciones. Principios universales, premisas ocultas del silogismo inductivo, permitirían la obtención de ese resultado. Hemos visto que no ocurre nada de eso. No arruina el método la debilidad de la prueba que debe fundar el principio de la uniformidad del curso de la naturaleza, ni el insuficiente tratamiento de los problemas suscitados por la existencia de causas complejas y múltiples, sino la inadecuación del principio invocado a la función que debe cumplir.

¿Quiere decir esto que esos métodos no tengan valor? Nada de eso. Al ser estimadas como verdaderas ciertas inferencias inductivas, puede que estemos en condicio-

[28] Son aquéllas que satisfacen las condiciones siguientes: No contienen más que predicados de observación; puestas en forma prenexa, no contienen más que cuantificadores universales; tienen por conector principal un implicador y son tales que una variable cuantificada figura a la vez en el antecedente y en el consecuente de la implicación principal. Son, por ejemplo, las fórmulas siguientes, a reserva de que los predicados que en ellas figuran pertenezcan al lenguaje de observación:

$$(x)(y)((Rx, y \,\&\, Ax) \supset By)$$
$$(x)(y)(z)((Rx, y, z \vee Ax) \supset (By \supset Cz))$$

En efecto, se puede, por especificación, deducir, a partir de tales fórmulas, otras fórmulas del tipo precedentemente estudiado.

nes de afirmar el determinismo de tal predicado con relación a tal conjunto finito. Las técnicas de eliminación pueden ser aplicadas entonces. Pero deben quedar confinadas en un papel tal. En otros términos, pertenecen a una teoría de la inducción secundaria. No dan cuenta del surgimiento del conocimiento científico a partir de sus orígenes experimentales. No pueden fundamentarlo en la experiencia, como era el deseo de **Mill**. Dejan, pues, sin respuesta los problemas fundamentales de la lógica inductiva.

2. Las reglas inductivas

La lógica inductiva clásica no logra constituirse bajo la forma de una teoría de los principios de la inducción. Hace falta, entonces, darle una función más modesta, limitar sus ambiciones. Se pretenderá simplemente que constituya un cuerpo de reglas inductivas, que codifique así los pasos del pensamiento inductivo estimados comúnmente como válidos.

¿Qué es una regla inductiva? Las reglas inductivas determinan el tipo de conclusiones que pueden mantenerse cuando se consiguen ciertas premisas. Si se quiere evitar que la inducción sirva para legitimar cualquier conclusión compatible con las premisas, es muy necesario que el pensamiento inductivo se conforme a reglas. Y estas reglas deben ser formales, de lo contrario el concepto de lógica inductiva corre el riesgo de perder todo su contenido. Pero no se exigirá de ningún modo una demostración de la verdad de las conclusiones inducidas, pues la forma de las reglas inductivas no tiende a una exigencia semejante. En efecto, no es necesario afirmar que sus conclusiones son verdaderas, basta con que sean estimadas como correctamente inferidas, porque son inferidas según reglas canónicas y, a este título, incorporadas al cuerpo de proposiciones que constituyen el conocimiento experimental.

Pero, ¿cuáles son esas reglas cuya existencia protege del error al pensamiento inductivo? Es muy necesario reconocer que la tradición no ofrece más que recursos muy limitados en este terreno. ¿A qué se reducen sus máximas? Nos piden simplemente generalizar, afirmar las hipótesis que la experiencia no ha invalidado todavía y comprobar su solidez. Tales preceptos son de una insuficiencia notoria. Carecen de precisión y, en esta materia, la imprecisión genera incoherencia. Una regla imprecisa permite la aserción de una pluralidad de enunciados que se revelarán como compatibles. Quisiéramos mostrar que ciertas reglas, cuya insuficiencia es patente, pero que parecen, no obstante, perfectamente sanas y que son comúnmente admitidas, encierran antinomias. Nuestra demostración seguirá los trabajos de **Hempel** y **Goodman**.

Inducir es generalizar. La insuficiencia de esta máxima está muy ampliamente reconocida. Su empleo, se ha dicho, corre el riesgo de ocultar lo que es la operación esencial y difícil del pensamiento inductivo, a saber, la invención de la fórmula general que coliga los hechos particulares. Pero esta objección no tiene nada de esen-

cial: la constitución de una teoría lógica de la inducción no impone en absoluto que se restrinja el lugar de una doctrina de la invención. Lo que es más grave es el carácter restrictivo de esta máxima: Hay inducciones que no se reducen ni a una generalización ni a una cadena de generalizaciones. Pero, ¿no es preciso ir todavía más lejos y afirmar que una regla inductiva que autoriza las generalizaciones lleva a contradicciones?

Tal ocurre desde el momento en que se despoja al concepto de género de su significación estricta. Si la generalización se concibe como el paso del individuo al género natural, al tipo, la regla que nos permite afirmar que todo lo que es verdadero del primero lo es del segundo es admisible. Pero no ocurre lo mismo si, como sucede en los usos más corrientes, se quita al concepto de género esa significación precisa. ¿En qué se convierte entonces la regla en cuestión? Nos autoriza, se dice, a pasar de *algunos* a *todos*. Pero, ¿qué debemos entender por eso? Que se pasa de la aserción de ciertas proposiciones a la aserción de *una* proposición distinta, de la cual se deducen las primeras sustituyendo ciertas variables por constantes. El empleo más preciso, pero también más limitado, de una regla tal sería el siguiente: A partir de ciertos juicios perceptivos, que se expresan mediante fórmulas singulares del lenguaje de observación, se infiere una fórmula general de la cual son ejemplos las primeras[29]. En el caso más simple, la regla se enunciaría así: "Sean A y B predicados de observación monádicos, y a_i nombres de constantes individuales. Si se aseveran fórmulas del tipo Aa_i y Ba_i, inferir $(x)(Ax \supset Bx)$, en ausencia de ejemplos contrarios".

Pero es fácil mostrar que esta regla es inaceptable. Ya **Mill** señalaba, en un texto célebre[30], que no generalizamos cualquier cosa. Tenemos la sensación, decía, de que ciertos descubrimientos son accidentales y otros manifiestan una conexión legal. No aplicamos la regla de generalización más que a estos últimos. Pero, ¿cómo distinguir esas conexiones legales? Tal es el problema que este autor planteaba lúcidamente y resolvía muy imperfectamente. No hay ninguna duda respecto a que la solución de este problema es indispensable si queremos dar alguna solidez a nuestras inducciones. Pero es preciso ir más lejos y decir que, a falta de solución, la regla de generalización llevará necesariamente a antinomias porque autorizará la aserción de proposiciones contradictorias. Es lo que ha mostrado **Hempel**[31] mediante un razonamiento extremadamente simple. Consideremos, en primer lugar, un ejemplo en el cual la regla de generalización está aplicada de modo muy laxo: Se han efectuado n observaciones de valores correlativos de dos magnitudes físicas. Designaremos por $\langle x_i, y_i \rangle$ el resultado de la i-ésima observación y, para simplificar, supondremos que los dominios de variación de esas magnitudes son respectivamente intervalos I e

[29] La definición de los términos técnicos empleados aquí (fórmulas singulares, ejemplos, etc.) se encuentra en el apéndice 1.

[30] *L.D.I.*, L. 3, cap. 3, § 3, p. 355.

[31] *I.I.*, § 5.

I' de R[32]. Se puede concebir que la aserción de un enlace funcional determinado entre esas magnitudes es el producto de la aplicación de la regla de generalización a las premisas proporcionadas por la observación. Pero es claro que todo grafo que contiene los puntos representativos de las observaciones puede ser concebido como una "generalización" de las observaciones. En términos más simples, hay una infinidad de curvas que pasan por un número finito de puntos[33]. Esta advertencia extremadamente banal tiene una consecuencia evidente: La aplicación de la regla de generalización a un caso tal autoriza, si no sabemos introducir algún principio que restrinja el conjunto de las hipótesis admisibles, la aserción *simultánea* de enunciados acerca de los cuales está claro que son contradictorios.

Tomemos ahora en consideración el caso en que la regla de generalización se aplica a la aserción de las fórmulas más simples, a saber, las implicaciones universales entre predicados monádicos de observación. Si tales aplicaciones llevan a antinomias, quedará claramente establecido que la regla de generalización no debe inspirar confianza alguna. Ahora bien, se sabe, desde los trabajos de **Goodman**, que ocurre así.

Sea P el predicado "ser una esmeralda"; Q, "ser verde". Después de la observación de n esmeraldas verdes y de ningún ejemplo contrario, se obtiene por generalización la proposición "todas las esmeraldas son verdes", que expresa la fórmula $(x)(Px \supset Qx)$. Pero sea Q' el predicado derivado "ser verde y observado posteriormente al tiempo t'' (siendo t el instante de la última observación). Es claro que se han observado n objetos que son todos P y de los cuales ninguno es un Q'. La regla de generalización lleva a afirmar $(x)(Px \supset \sim Q'x)$, dicho de otro modo, a prever que ninguna esmeralda que sea observada en el futuro será verde. Se pueden proponer además otras formulaciones de la misma "paradoja". Q'' designa la propiedad "ser verdul", siendo así definido el término verdul: "x es verdul si y solamente si x es observado anteriormente a t y es verde, o posteriormente a t y es azul" (se designa por t el instante de la última observación efectuada); por generalización, después de la observación de esmeraldas todas ellas verdes, se concluye que todas las esmeraldas son "verdules", dicho de otra manera, que todas las que sean observadas en el futuro serán azules. Tal es la paradoja de **Goodman** que prueba que la regla de generalización es antinómica incluso si se restringe su campo de aplicación a los predicados monádicos de observación.

Contrariamente a lo que se podría pensar, no es fácil evitar ese resultado. Como señala **Scheffler**, invocar un principio que exige que se elija la hipótesis más falsable

[32] No hace falta decir que el desarrollo que sigue puede aplicarse a otros casos: Basta con que los dominios de variación sean infinitos. La restricción a un caso particular tiene por único fin simplificar la exposición.

[33] Y asimismo una infinitud de potencia igual a Aleph 2.

no es de ninguna ayuda[34]. Asimismo es una medida ineficaz excluir los predicados cuya definición contiene referencias temporales, pues esta cláusula no tiene sentido más que una vez fijado el conjunto de predicados primitivos a partir de los cuales se definen los demás. Ahora bien, supongamos que "verdul" sea uno de los predicados primitivos y "azerde", que significa "ser azul y observado anteriormente a t, o verde y observado posteriormente a t'', otro predicado primitivo. Es entonces el predicado verde el que es derivado. Se define naturalmente a partir de los dos predicados "verdul" y "azerde" y su definición comporta una referencia temporal. Además, la paradoja de **Goodman** podría reaparecer bajo otras formas. Basta con definir predicados del tipo "tener la propiedad P o ser uno de los individuos siguientes: $a, b, \ldots$" para encontrarla de nuevo. De modo general, es preciso excluir todos los predicados que corresponden a clases definidas, al menos parcialmente, por extensión, clases que **Russell** llama "manufacturadas"[35].

En realidad, sería un error considerar que el problema que plantea la paradoja de **Goodman** atañe simplemente a la posibilidad de definir, en un lenguaje determinado, predicados derivados y de aplicar a esos predicados la regla de generalización. Atañe igualmente a la *significación* de los predicados primitivos. Si se quiere evitar la paradoja, es necesario, por supuesto, excluir ciertos tipos de predicados derivados; pero también es necesario imponer condiciones restrictivas relativas al sentido de los predicados primitivos y esas condiciones no encuentran su expresión en el cuadro de una semántica formal. Se podría exigir que esos predicados designen "géneros naturales", "tipos". Pero una solución semejante repugna a la mayor parte de los pensadores que quieren construir una lógica inductiva. ¿No pone acaso a este disciplina bajo la dependencia de una ontología, lo cual es decir que el conocimiento científico no es en absoluto autónomo con respecto a la filosofía? Y además, ¿cómo distinguir de modo efectivo los predicados admisibles?

Para evitar tales soluciones que son, en cierto sentido, una renuncia a la idea de una lógica inductiva y el abandono de las tesis más fundamentales de la epistemología positivista, se han propuesto paliativos. **Goodman** pretende que se delimite una clase de predicados llamados "proyectables"[36]. La regla de generalización sólo se aplicará a ellos. Pero en tanto no se proponga un método preciso para determinar cuáles son, eso no será más que bautizar la dificultad. Ahora bien, un análisis semántico formal no es de ninguna ayuda para definir la proyectabilidad. Queda el recurso a la "pragmática": **Goodman** propone que se estime como proyectable a un predicado que se haya consolidado por un empleo fructífero en la formulación de induc-

[34] *A.S.*, p. 239-240. h es más falsable que h' si la falsedad de h implica la de h'; estrictamente más falsable si, además, h' puede ser falsa sin que lo sea h. En el caso de "$(x)(Px \supset Q_1x)$" tenemos que es más falsable que "$(x)(Px \supset Q_2x)$" si se tiene $\vdash (x)((Px \,\&\, \sim Q_1x) \supset \sim Q_2x)$, lo que se obtiene si $\vdash (Q_2 \subset Q_1)$. Pero no es tal el caso del segundo ejemplo escogido: Q y Q' no admiten comparación.

[35] *H.K.*, p. 5, cap. 7, p. 432.

[36] En rigor, sería proyectable todo predicado perteneciente a la clausura booleana de un conjunto de predicados proyectables.

ciones[37]. Llega hasta definir un índice de proyectabilidad que servirá para resolver los problemas que plantea el uso de la regla de generalización.

Semejante respuesta es poco satisfactoria. Manifiesta un singular conservadurismo en materia científica, actitud, por otra parte, muy frecuente en los medios positivistas. El principio general que la fundamenta es que un concepto es tanto más seguro en su uso científico cuanto más frecuentemente ha sido utilizado en la ciencia pasada. No se ve apenas cómo una máxima tal sería favorable al progreso de la ciencia. Pero, lo que es más grave, nada legitima la confianza otorgada a los predicados que el empleo ha consolidado sino una oscura inducción que les concierne en segundo grado. El procedimiento de **Goodman** es parecido al de **Mill**, quien pretende fundamentar el principio de la uniformidad del curso de la naturaleza, "base indispensable de una fórmula científica de la inducción", "con una revisión de las inducciones a las que los hombres han llegado por la práctica y sin método científico", o de modo más preciso, con ese razonamiento que le lleva a afirmar "que la uniformidad puede presumirse a partir de un número dado de ejemplos con un grado de seguridad tanto mayor cuanto que los hechos pertenezcan a una clase en la cual las uniformidades se hayan reconocido como más constantes"[38]. En suma, estimar a un predicado consolidado por el uso como proyectable es simplemente relanzar el problema que plantea el empleo de una regla de generalización.

Satoki **Watanabe**[39] ha propuesto una interesante solución de la paradoja de **Goodman** que, según él, manifestaría el fracaso de un análisis formal de la inferencia inductiva. Para resolver el problema, es necesario, señala, quebrar la aparente simetría entre "verde" y "verdul" y ese resultado no puede obtenerse más que si se apela a un hecho empírico, extra-sintáctico. El concepto de consolidación (*entrechment*) remite a un hecho empírico, a saber, un uso lingüístico. Pero la solución de **Goodman** es torpe porque ese hecho lingüístico está demasiado alejado de los otros aspectos de la inferencia inductiva. Por el contrario, el análisis de las definiciones operatorias de los predicados va a abrir la vía hacia una solución. Supongamos dos cronómetros que permitan respectivamente determinar si un objeto es verde o si es verdul. El segundo, al contrario del primero, deberá contener si no un reloj, al menos algún mecanismo cuyas propiedades cambian en el instante t. Del predicado verde diremos que es operatoriamente independiente del tiempo, del predicado verdul que no lo es. Del mismo modo se podrían definir predicados independientes de la localización espacial y restringir el conjunto de los predicados primitivos proyectables a un conjunto de predicados "naturales" (operatoriamente independientes del tiempo y del espacio) y sin poner el análisis lógico bajo la dependencia de una ontología.

---

[37] Más exactamente, un predicado puede consolidarse por el empleo de un predicado diferente pero de la misma extensión. Se puede incluso considerar que también por el empleo de un predicado del "mismo género", "próximo" (pero falta naturalmente definir de manera exacta esos conceptos).

[38] *L.D.I.*, L. 3, cap. 4, § 2 y 3, pp. 361-362.

[39] *M.E.I.I.*, § 11, pp. 99-103.

Es claro que una solución semejante tiene sentido y que los criterios a los que apela se utilizan efectivamente para discernir el conjunto de los predicados proyectables. Pero es preciso señalar que **Watanabe** presupone, como dice explícitamente, que se puede distinguir en primer lugar un conjunto de propiedades constantes en el transcurso del tiempo, o independientes de la localización. Se admite la verdad de una física que estará al nivel de la física del sentido común. Esto quiere decir que una inducción muy simple, que recaiga sobre predicados de observación, no es primaria sino en apariencia y su validez depende, en realidad, del conjunto de conocimiento físico que se pone en juego para asegurar la proyectabilidad de los predicados. Pero, ¿qué pasaría si se decidiera estimar como primitivo, y por tanto como independiente del tiempo, un predicado tal como "verdul"? *A priori,* nada puede objetarse a esa elección. Pero habría que reconstruir todo el conocimiento físico y nada asegura que, en esas condiciones, sea posible esta reconstrucción sin violar principios fundamentales, tal como el principio de causalidad.

Así se puede evitar la paradoja de **Goodman,** pero a condición de renunciar a la pureza de los métodos del análisis formal. Además, la solución esbozada por **Watanabe** prueba que no hay, hablando propiamente, teoría de la inducción primaria. Es decir, nos aleja mucho de lo que constituye el fin de las lógicas inductivas[40].

Pero aun cuando se resolviera incluso el problema de la discriminación de los predicados proyectables, esto no implicaría que se pueda dar una formulación de la regla de generalización que evite las antinomias. El primer ejemplo de aplicación de esta regla que habíamos propuesto se queda con todas las dificultades que suscita. Todo enlace funcional es una hipótesis que tiene forma de ley o, al menos, se estiman como leyes las funciones que satisfacen ciertos requisitos y que no se pueden rechazar, por tanto, como antinaturales[41]. Como señala **Hempel**[42], los obstáculos encontrados en este caso son más graves que los que conciernen a la paradoja de **Goodman,** ya que ahora el problema es restringir a una sola hipótesis un conjunto de hipótesis que tienen todas forma de ley. Si se quiere evitar contradicciones, es imprescindible añadir, a la regla de generalización, hipótesis auxiliares que limiten sus condiciones de aplicación.

---

[40] Añadamos a eso la crítica a la que **Watanabe** ha sometido la definición lógica del concepto de género natural. Según él, no se puede definir el grado de analogía entre objetos a partir de un criterio puramente formal. Una vez admitido que no hay indiscernibles, dos objetos cualquiera tienen siempre el mismo grado de similitud, en el sentido de que, en la clausura booleana de un álgebra de predicados que tiene n átomos, poseen necesariamente 2^{n-2} propiedades comunes. No se permite, pues, medir la similitud por el número de propiedades comunes, excepto si se está en condiciones de determinar un conjunto de predicados que se estimarán como primitivos.

El análisis formal, al no poder definir un grado de similitud, no puede ayudarnos a constituir géneros naturales (*Ibid.,* § 12, p. 104-106). Correlativamente, parece imposible definir de modo estrictamente formal el concepto de "variedad de casos de confirmación".

[41] Por ejemplo, aquéllas que son contínuas o, para las aplicaciones de N en N, las que son calculables.

[42] *I.I.,* § 5.

Si hay una vía para evitar el obstáculo, parece única: Sería preciso definir un orden sobre el conjunto de las hipótesis y exigir que sea solamente mantenida la primera ley general no invalidada por la experiencia. Incluso este método no es utilizable más que si el conjunto de las hipótesis posibles es enumerable; si no, algunas hipótesis corren el riesgo de no ser excluidas jamás. Pero pasemos por encima de esta dificultad. El problema esencial es definir este orden sin que parezca puramente arbitrario. Naturalmente se ha pensado en utilizar el orden de la simplicidad decreciente. Pero es preciso definir este orden. Lo menos que se puede decir es que, en ese dominio, los resultados obtenidos son insuficientes. Por supuesto, existen casos privilegiados en los cuales se puede decir sin dificultad cuál de dos leyes es la más simple. El grado de una función algebraica es, por ejemplo, una medida adecuada de su complejidad. Del mismo modo, el número de parámetros es una medida fiable de la simplicidad. Así se dirá que la recta es más simple que el círculo y el círculo que la elipse. Son soluciones del tipo que propone **Popper**, quien identifica simplicidad y contrastabilidad[43]. Semejantes consideraciones no carecen de eficacia científica. **Kemeny**, que adopta la misma perspectiva que **Popper**, puede presentar ejemplos bastante sugestivos[44]: La elipse se impuso a **Kepler** como trayectoria de los planetas con preferencia a los epiciclos porque es más simple (dado el plano de la órbita, está definida por tres parámetros solamente); en la determinación de la ley de gravitación, **Einstein** elige la ley más simple. Pero tales ejemplos no prueban en modo alguno que un orden de simplicidad pueda ser definido de modo general y sin ambigüedad. Por numerosas que sean las tentativas realizadas en este dominio[45], es preciso reconocer que han sido infructuosas. A menos que se proceda a fuerza de convenciones enteramente arbitrarias, el orden de simplicidad no está definido más que en casos privilegiados; en una palabra, sigue siendo parcial y son numerosas las parejas que no se pueden comparar[46]. Es decir, el concepto de simplicidad es de poca utilidad para resolver el problema que planteamos.

Así muestra su insuficiencia una teoría que consistiría en la enunciación de reglas inductivas. A falta de dar a esas reglas una formulación suficientemente precisa, autoriza la introducción de enunciados contradictorios en el cuerpo de proposiciones aseveradas. Ningún método eficaz ha sido propuesto para evitar esta dificultad. Esta vía no es, por tanto, la que lleva a la constitución de una lógica inductiva.

---

[43] *L.S.D.*, cap. 5, § 39; pp. 130-135 y cap. 6, § 43, pp. 140-141.;

[44] *U.S.I.*, § 4, *Passim.*

[45] Ver, en particular: **Goodman** (N.): *S.I., L.S.P.;* **Wrinch** (D.) y **Jeffreys** (H.): *C.F.P.* La simple definición de un grado de complejidad de los predicados plantea cuestiones. En la clausura booleana de un álgebra de predicados, la longitud de la función booleana que define un predicado no puede servir de medida de su complejidad ya que depende de la elección de los predicados que serán estimados como primitivos (es decir, de la elección de un sistema libre de generadores).

[46] Unicamente el conjunto de las funciones calculables constituye una excepción: Una numeración de **Gödel** puede ser tenida por un orden "natural" de simplicidad.

3. La noción de confirmación

La verdad de una ley experimental no está en absoluto garantizada por la multiplicación de los ejemplos que la confirman. Por numerosos que sean, queda sometida al riesgo de ser invalidada por un nuevo ejemplo. Pero si la lógica no intentaba fundar sus pruebas sobre la confirmación y, en consecuencia, privilegiaba la eliminación, al menos se creía que un análisis formal podía proporcionar una definición estricta del concepto de confirmación o, más exactamente, que esta definición era obvia y no planteaba ningún problema que merezca examen. Desde los bellos trabajos de **Hempel**[47] se sabe que no hay nada de eso.

En el marco de esta obra, no podrían tratarse exhaustivamente los problemas que plantea el análisis formal del concepto de confirmación. Este tema ha dado nacimiento a una literatura muy abundante y el público francés puede fácilmente ponerse al corriente del estado de las investigaciones gracias a la reciente traducción de la obra de **Scheffler** que constituye una excelente puesta a punto[48]. Nuestro único propósito es mostrar la indigencia de la lógica inductiva clásica cuando se enfrenta con un problema de este tipo y desentrañar la significación de los resultados obtenidos o más bien de las dificultades encontradas.

El problema de **Hempel** es sencillo de enunciar: Definir en términos puramente lógicos el concepto de confirmación. Dicho de otro modo, al estar expresadas proposiciones por fórmulas de un lenguaje formalizado, ¿qué relación lógica debe existir entre dos fórmulas para que pueda decirse de una que confirma a la otra? El objetivo de **Hempel** sería obtener una definición puramente sintáctica, no sirviendo las referencias semánticas o pragmáticas más que para "apreciar la significación del problema"[49]. Esta perspectiva nos parece demasiado estrecha. Por razones que hemos dicho ya, la semántica formal debe ser tomada en consideración, y preferimos hablar de "formal" más bien que de "sintáctica". Por otra parte, **Hempel** no excluye las consideraciones semánticas[50]. Todos los resultados que obtiene se aplican a sistemas semánticos y se pueden leer sus trabajos sustituyendo los conceptos sintácticos por los conceptos semánticos correspondientes. Es lo que haremos, sin otra precisión, a lo largo de este parágrafo.

Consideremos, en primer lugar, el caso más simple: A y B son predicados monádicos de observación. ¿Cuáles son las proposiciones que, constituyendo protocolos de observación, en otras palabras, las fórmulas que, expresando juicios perceptivos, confirman la ley $(x)(Ax \supset Bx)$? **Nicod** había propuesto el criterio siguiente[51], corrientemente admitido: un ejemplo confirma esta ley si es un A y un B. Pero esta

[47] *P.S.D.*, *S.L.C.*
[48] *A.S.*, 2ª parte, cap. 3 a 7, pp. 161 a 224.
[49] *P.S.D.*, § 2, p. 116.
[50] Supone, por ejemplo, que las constantes consideradas pertenecen al lenguaje de observación.
[51] *P.L.I.*, p. 23.

definición no es en modo alguno satisfactoria: el sentido común que la impone parece exigir asimismo que todo ejemplo que confirme una ley confirme igualmente toda ley lógicamente equivalente. Si no, atendiendo al sentido y al uso de la equivalencia lógica, se seguiría que una ley sería confirmada o no por un ejemplo según su modo de escritura. En efecto, es necesario decir que un objeto que no es ni un A ni un B confirmá la ley $(x)(\sim Bx \supset \sim Ax)$ y por tanto la ley equivalente $(x)(Ax \supset Bx)$. Así, el enunciado que da cuenta de la percepción de un lápiz rojo confirma la ley "todos los cuervos son negros". He ahí lo que se ha llamado paradoja de **Hempel**[52].

Señalemos en seguida que no es tan fácil como pueda creerse evitar esta consecuencia enojosa. Diversas soluciones destinadas a excluir la posibilidad de una "ornitología de gabinete" que abre, no son de hecho más que callejones sin salida. El mal no viene del empleo de la implicación en la expresión de las leyes universales; los mismos problemas se plantearían con fórmulas en las que figuraran equivalencias lógicas. No se puede exigir que el campo de aplicación de una ley sea limitado antes de que se defina la relación de confirmación. Una limitación semejante no encuentra definición aceptable en el marco de la lógica tradicional. De todos modos, la definición de la confirmación que se funda sobre el criterio de **Nicod** lleva a otras consecuencias absurdas desde el momento en que se toman en consideración fórmulas en las que aparecen predicados diádicos[53]. En esas condiciones, se impone un nuevo examen del problema. A este afán responden los trabajos de **Hempel.**

Para definir la confirmación se podría pensar en utilizar el hecho de que las leyes sirven para predecir. Sea h una hipótesis, y C una clase finita de proposiciones de observación. Decir que h sirve para predecir ciertas proposiciones de la clase C es afirmar que existe una partición de C en C_1 y C_2, siendo C_2 no vacía y tal que se deduce de C_1 y de h y no sólo de h[54]. Se podría proponer la definición siguiente: C confirma h si h sirve para predecir ciertas proposiciones de la clase C. Una definición semejante parece muy natural. Además es mucho menos limitada que la que estaba inicialmente propuesta. Pero no permite evitar la paradoja de la que hemos hablado[55].

---

[52] Hay, en realidad, otras consecuencias paradójicas de la condición de equivalencia: **Hempel** (*S.L.C.*, § 3) señala que la ley propuesta se escribe también: "$(x)((Ax \ \& \sim Bx) \supset (Bx \ \& \sim Bx))$". Cuando se escribe de esta forma, ningún ejemplo puede confirmarla si se mantiene el criterio de **Nicod.**

[53] Consideremos las fórmulas:
"$(x)(y)(\sim (Rx, y \ \& \ Ry, x) \supset (Rx, y \ \& \sim Ry, x))$" y "$(x)(y)Rx, y$". Si para una pareja $\langle a, b \rangle$ se tiene "$Ra, b, \ \& \sim Rb, a$" esa pareja confirma la primera ley e invalida la segunda según el criterio de **Nicod**. Ahora bien, esas dos fórmulas son lógicamente equivalentes (Cf. *S.L.C.*, § 5, p. 13); el ejemplo es retomado por **Carnap** (R.): *L.F.P.*, § 87, pp. 469-470.

[54] Una "ley" no basta para deducir proposiciones de observación. Es preciso también que se conozcan ciertas proposiciones de observación. De ahí la definición propuesta.

[55] Es claro que lleva a estimar "$\sim Ba \ \& \sim Aa$" como un ejemplo que confirma "$(x)(Ax \supset Bx)$". Pero permite evitar lo que von **Wright** llama la segunda paradoja de la confirmación (*L.P.I.*, cap. 6 § 6, p. 123). Esta segunda paradoja surge si, ampliando el criterio de **Nicod**, se decide estimar como confirmante todo ejemplo que no invalide. Así "$\sim Aa \ \& \ Ba$" confirmará la ley "$(x)(Ax \supset Bx)$". La definición de la confirmación en términos de predicción permite evitar esta segunda paradoja que hemos dejado de lado para claridad de la exposición.

Además obliga a admitir que ciertas leyes, que sin embargo no contienen sino predicados de observación, no se confirman jamás. Para retomar el ejemplo propuesto por **Hempel**, ocurre lo mismo con la ley siguiente, en la que R_1 y R_2 son predicados diádicos de observación: $(x)((y)R_1x, y \supset (\exists z) R_2x, z)$ Al no ser nunca verificado por la observación el antecedente, no se puede concluir de esta ley ninguna predicción por *modus ponens.*

Pero esta definición tiene un defecto mucho más grave: Nos vemos llevados a admitir que lo que confirma una ley confirma igualmente toda consecuencia de esta ley. ¿No es ese principio el que justifica nuestra creencia en las consecuencias de las hipótesis teóricas que han sido confirmadas? Ahora bien, admitido ese principio y la definición de la confirmación que estudiamos, es claro que cualquier cosa confirma cualquier cosa. Sea *e* un protocolo de observación y *h* una hipótesis cualquiera (no necesariamente expresable en el lenguaje de observación) compatible con *e. h* & *e* permite predecir *e,* por tanto es confirmada por *e* y *h* es una consecuencia de *h* & *e*. Así pues *e* confirma *h*[56]. Consecuencia manifiestamente inadmisible y que muestra que, en el análisis de la confirmación, las ideas aparentemente más sanas llevan a las consecuencias más aberrantes. Para obviar esas dificultades, **Hempel** ha elaborado una definición de la relación de confirmación. El campo de aplicación de esta definición es limitado: no se aplica más que a los lenguajes de observación del primer orden sin signo de igualdad y atañe exclusivamente al caso en que la proposición confirmante es un protocolo de observación, es decir, una fórmula singular.

Hempel comienza por exigir que toda definición de la confirmación satisfaga un cierto número de requisitos lógicos. Son los siguientes[57]:

1° Si *e* confirma todas las proposiciones de una clase *K*, *e* confirma toda consecuencia de *K*. Se sigue de ahí que si *e* confirma *h*, *e* confirma igualmente toda proposición equivalente a *h*.

2° *e* es compatible con toda proposición que confirma. **Hempel** llega hasta postular –lo que no es una consecuencia del requisito que acabamos de enunciar– que la clase de las proposiciones confirmadas por *e* es consistente.

3° Si se tiene $e \vdash h$, entonces *e* confirma *h*.

Para definir el concepto de confirmación, **Hempel** propone entonces una elaboración técnica de la banal idea según la cual una proposición singular confirma una ley, si implica "lo que afirmaría la ley universal si el universo se redujera a los únicos individuos cuyo número aparece en esa proposición singular"[58]. Con ese fin, define de modo riguroso el concepto de "desarrollo de una fórmula universal *h* para los individuos de *e*" (designando *e* un protocolo de observación). Será una fórmula

[56] Cf. **Scheffler** (I.): *A.S.*, 2ª parte, cap. 3, pp. 168-169.
[57] *P.S.D.*, § 3, pp. 127-128: "*e*" designa una fórmula, "*K*" una clase de fórmulas.
[58] *S.L.C.*, § 9.

singular, designada por $D_{Ie}(h)$, definida con todo rigor por las solas constantes individuales que figuran *esencialmente* en h[59] mediante reglas recursivas que es inútil enumerar aquí[60]. **Hempel** propone entonces las definiciones siguientes:

1° e confirma directamente h, si $e \vdash D_{Ie}(h)$, a reserva de que $D_{Ie}(h)$ no sea analítica, salvo si h también lo es.

2° e confirma h si existe una clase de proposiciones de la cual se deduce h y tal que cada proposición de esta clase sea o directamente confirmada por e o consecuencia de e[61].

La segunda de estas dos definiciones tiene por objetivo permitir que una proposición singular confirme a otra proposición singular. Pero está claro que si e confirma directamente a h, *a fortiori*, e confirma a h.

Se puede mostrar fácilmente que la definición propuesta satisface las condiciones citadas anteriormente[62]. ¿Quiere decir esto que sea plenamente satisfactoria? Está claro, ante todo, que es demasiado restringida. Al final de sus dos artículos, el propio **Hempel** ha insistido en la necesidad de extenderla a lenguajes más comprensivos y de tratar el caso en que la proposición confirmante no es molecular[63], si se quiere que pueda ser utilizada de modo efectivo en el análisis epistemológico. Tal como se presenta, la definición de **Hempel** no tiene, por lo tanto, más que un uso: probar que el análisis formal es apto para brindar una definición de la confirmación que no parece absurda si se la compara con la idea intuitiva que tenemos de lo que debe ser un caso de confirmación.

¿Pero es siquiera eso? No lo parece. Para determinar el concepto formal de confirmación, **Hempel** ha impuesto una condición que debería satisfacer toda extensión del concepto propuesto y que nos parece inaceptable. Pide que la proposición confirmante sea compatible con *la clase* de las proposiciones que confirma; dicho de otro modo, que esta clase sea consistente y no, simplemente, que sea compatible con *toda* proposición que confirma[64]. Esta condición es contraria a la idea intuitiva

---

[59] Figura esencialmente en e toda constante que figure igualmente en toda fórmula lógicamente equivalente a e.

[60] Son las siguientes:

1ª Si h es atómica, $D_{Ie}h$ es h.

2ª Si h es de la forma $(x_i)\Phi, D_{Ie}h$ es $D_{Ie}\Phi$, si no se da en Φ el caso de x_i; si no es $\bigwedge_{\gamma \in Ie} D_{Ie}\Phi^{\gamma}_{x_i}$ (designando $\Phi^{\gamma}_{x_i}$ el producto de la sustitución de x_i por γ en Φ, e Ie el conjunto de las constantes individuales de e).

3ª $D_{Ie}(h \vee h')$ es $(D_{Ie}h \vee D_{Ie}h')$, etc...

La aplicación de estas reglas, que corresponden a las diversas reglas recursivas que definen el conjunto de las fórmulas del lenguaje considerado, permite definir el desarrollo de toda fórmula (Cf. *P.S.D.*, § 4, p. 131).

[61] *P.S.D.*, § 8, p. 142.

[62] *Ibid.*, pp. 142-143 (T. 8-12 a 8-23) y *S.L.C.*, § 9, *in fine*.

[63] En el uso corriente, se considera que una teoría puede ser confirmada por una ley universal estimada como verdadera.

[64] Enuncia además explícitamente esta condición (*P.S.D.*, § 3, pp. 127, 3.12).

que nos hacemos acerca de la confirmación. Se puede invocar el ejemplo de las hipótesis estadísticas, como hace **Carnap**: un mismo recuento de frecuencias en una muestra finita confirma dos hipótesis que atribuyan a la frecuencia en la población un valor próximo al que tiene en la muestra, aun cuando esas dos hipótesis sean contradictorias[65]. El ejemplo tiene la ventaja de aplicarse a proposiciones que se expresan en el lenguaje para el que **Hempel** ha definido efectivamente la relación de confirmación. Pero, como hace **Popper**[66], se pueden citar ejemplos más sorprendentes, que muestran que el uso corriente del término "confirmación" nos obliga a admitir que una proposición confirma hipótesis contradictorias. Así, a la vista de la imprecisión de las medidas, los mismos hechos confirman a la vez la dinámica clásica y la dinámica relativista. **Ayer** evoca de modo general el caso de las observaciones cuantitativas que concuerdan con un número indefinido de hipótesis diferentes y mutuamente contradictorias[67]. Ciertamente, dos hipótesis contradictorias no deben ser confirmadas por la misma clase de proposiciones de observación, pero no se podría requerir que la intersección de las clases de proposiciones que las confirman sea vacía. La definición propuesta por **Hempel** descansa pues sobre una condición que es, por lo menos, sospechosa.

¿Elimina, al menos, la famosa paradoja? En modo alguno: la primera de las condiciones mantenida por **Hempel** la implica necesariamente. Es verdad que **Hempel** arguye el hecho de que esa paradoja no es una contradicción lógica sino que simplemente indica que ciertas exigencias intuitivas (la condición de equivalencia, la exclusión de los casos paradójicos de confirmación) no pueden satisfacerse simultáneamente. Pero, además, la definición de la confirmación en términos de desarrollo no permite evitar las consecuencias que arruinaban la definición en términos de predicción, a saber, que cualquier cosa confirma cualquier cosa. Es lo que establece **Watanabe**[68]. Sean dos leyes h_1 y h_2: "$(x)(Ax \supset Bx)$" y "$(x)(A'x \supset B'x)$", siendo A, A', B y B' predicados de observación. Sea h la conjunción de h_1 & h_2; k la fórmula:

$$(x)[(Ax \in A'x) \supset ((Ax \,\&\, Bx) \in (A'x \,\&\, B'x))]$$

y l la fórmula: "$\sim (\exists x)(Ax \,\&\, A'x)$". Se establece fácilmente $l \vdash h \equiv k$. Se sigue de ello que ($A'a$ y Ba) confirma (e incluso confirma directamente) k y por tanto h, si l es lógicamente verdadera. Supongamos que A designa la propiedad "ser un cuervo"; B, "ser negro"; A', "ser un día de agosto"; B', "ser día de nieve". La significación atribuída a los predicados autoriza la aserción de "$\sim (\exists x)(Ax \,\&\, A'x)$" a título de verdad lógica (e incluso de postulado de significación). Resulta de ello que la observación de un cuervo negro confirma la ley "Todos los días de agosto son días

[65] L. F. P., § 87, pp. 486-487.
[66] L.S.D., p. 374, nota.
[67] P.C., p. 256.
[68] M.E.I.I., § 8, pp. 89-90.

de nieve". La definición propuesta por **Hempel** es pues no sólo paradójica sino indefendible.

¿Es necesario entonces distinguir, como **Hempel** nos invita a hacer, dos conceptos: el "de ejemplo que confirma una hipótesis" y el "de ejemplo que refuerza la hipótesis" y decir que únicamente las confirmaciones no-paradójicas de una hipótesis la refuerzan? He ahí un argumento bien mezquino, pues sólo el primer concepto ha recibido una definición formal y es el otro el que debe jugar un papel importante en la epistemología de las ciencias inductivas.

Se han propuesto otras soluciones. No podemos examinarlas todas, pero es preciso decir que, por sugestivas que parezcan a primera vista, un análisis riguroso muestra ya que son inadmisibles, ya que no responden a la cuestión planteada. Por ejemplo **Goodman** propone la introducción del concepto de confirmación selectiva[69]. Partiendo del concepto de *contrarias*, define el ejemplo *que confirma selectivamente* una implicación universal como un ejemplo que la confirma e invalida la proposición contraria. Así (Aa y Ba) confirma $(x)(Ax \supset Bx)$ e invalida $(x)(Ax \supset \supset \sim Bx)$, mientras que no ocurre lo mismo con ($\sim Aa$ y $\sim Ba$). Por eso únicamente el primer ejemplo confirma selectivamente $(x)(Ax \supset Bx)$ y da un privilegio a esta ley sobre la ley contraria. Pero está claro que el concepto de confirmación selectiva viola la condición de equivalencia, dependiendo la contraria de una ley de su modo de escritura[70]. Además, su uso en una teoría epistemológica de la inducción no está fundamentado. El privilegio otorgado a los casos de confirmación selectiva sólo se justificaría si la experiencia nos sirviera exclusivamente para efectuar elecciones entre leyes *contrarias*. Es raro que el conjunto de las hipótesis posibles se restrinja así a una pareja de contrarios. Aun cuando ocurriera de otro modo, si el primer ejemplo de confirmación selectiva es valioso, en tanto que excluye una de las dos hipótesis posibles, los otros son a la vez de valor nulo. Añadamos que el campo de aplicación del concepto de confirmación selectiva es tan restrictivo como el concepto de contrario; es decir, no tiene sentido sino para las leyes que tienen la forma de implicación universal. Esas razones bastan para que se estime como insuficiente la solución propuesta por **Goodman**.

Una crítica de la definición de **Hempel** y una tentativa de solución de los problemas de la confirmación han sido propuestas por autores que se proclaman seguidores de la epistemología de **Popper**[71]. Se pretende que la teoría de la falsación aporte una respuesta a las cuestiones no resueltas. Una hipótesis, se dirá, no puede

---

[69] Cf. **Scheffler** (I.): *A.S.*, 2.ª parte, cap. 6, p. 214 sigu., **Ayer** (A.J.): *P.C.*, p. 254. **Ayer** discute la definición de **Goodman** (al que no nombra) y la contesta: su argumento esencial es que en ese caso la confirmación no puede obtenerse más que mediante ejemplos que verifican el antecedente, lo que estima demasiado limitativo.

[70] La contraria de "$(x)(Ax \supset Bx)$" es "$(x)(Ax \supset \sim Bx)$", que invalida "Aa & Ba". La contraria de la ley equivalente "$(x)(\sim Bx \supset \sim Ax)$" es "$(x)(\sim Bx \supset Ax)$, que invalida "$\sim Aa$ & $\sim Ba$".

[71] **Watkins** es el autor más representativo de esta corriente (ver las referencias citadas por **Scheffler:** *A.S.*, 2.ª parte, cap. 6, pp. 195-197).

estimarse como confirmada más que si se la ha sometido a la prueba de los hechos. Una observación sólo puede confirmarla si constituye realmente una puesta a prueba; en otros términos, si no está excluída la posibilidad de que la invalide. Si sabemos de un objeto que no es un A, es inútil buscar si es o no un B; no pudiendo esta observación invalidar la ley $(x)(Ax \supset Bx)$, no puede tampoco confirmarla. Esta argumentación es legítima. Pero es lamentable que ni los que la lanzan ni los que la critican hayan visto claramente sus consecuencias. No se puede hablar de control de una hipótesis por puesta a prueba, de riesgo de invalidación, sino después de la definición de un orden de adquisición de las observaciones o cuando se toma en consideración la dimensión de las clases presentes. Expliquémonos: ($\sim Aa$ y $\sim Ba$) es un informe de observación del que no se puede decir si constituye o no un control de la hipótesis. Si el observador ha sabido primeramente que a es un $\sim A$, al tratar de saber si es un B no ponía a prueba la hipótesis; no ocurre lo mismo si los dos enunciados, $\sim Aa$ y $\sim Ba$, han llegado a su conocimiento en el orden inverso. Esto no significa, como cree **Scheffler**, que tal informe de observación confirma una hipótesis en el instante t y no la confirma con otro instante[72], sino que el orden de adquisición de los datos es esencial para definir la noción de confirmación. Conclusión que no tiene nada de insensata, pero admitirla supone que se renuncia a una definición formal de la confirmación para aceptar una definición que depende de la pragmática.

Además, una definición de este tipo está en realidad justificada por consideraciones probabilitarias que aparecen más o menos netamente en ciertos autores que la han defendido[73]. Una observación no sería confirmante más que si acrecentara la probabilidad de una hipótesis. Pero, para que sea así, también es preciso que sea improbable en el caso en que la hipótesis no sea verdadera. Son asunciones implícitas, que conciernen a la dimensión de las clases presentes, las que nos llevan a estimar ciertos casos de confirmación como paradójicos. Precisamente porque la clase A es restringida con relación a la clase $\sim A$ (en el ejemplo citado anteriormente, porque son poco frecuentes los objetos del mundo sensible que son cuervos) ocurre que la probabilidad de $\sim A$ es muy fuerte, mientras que es débil la de A y B unidos. De ahí nuestra impresión plenamente legítima de que ciertos casos de confirmación son paradójicos: son aquellos que, *a priori* muy probables, acrecientan de modo desdeñable la probabilidad de la hipótesis. De momento no nos ocuparemos de la legitimidad de esta argumentación. Nos basta con constatar que las consideraciones probabilitarias son, en último término, tentativas que se han hecho para definir la relación de confirmación a partir de las nociones de control de una hipótesis, de falsación. Por supuesto, la definición del concepto formal de confirmación es plenamente compatible con la introducción de un concepto

[72] *A. S.*, pp. 202-203; **Scheffler** supone que si se sabe que a es un $\sim B$, a se convierte en confirmante y deja de serlo desde el momento en que se sabe que es un $\sim A$.

[73] Cf., por ejemplo, **Hossiason-Lindenbaun** (J.), *O. C.* y **Whiteley** (C. H.): *H.P.C.* Los pasos que vamos a describir aparecen muy claramente en el primero de esos dos autores.

métrico de grado de confirmación, como dicen **Hempel** y **Scheffler**[74], pero la tesis de los "popperianos", aceptada por numerosos autores, vuelve a mostrar que una teoría de la confirmación no puede constituirse más que en el marco de una lógica inductiva probabilitaria. Pone, pues, en evidencia la indigencia de esas lógicas inductivas clásicas a las que pertenecen incluso los trabajos de **Hempel.**

El concepto de confirmación es central en la epistemología de las ciencias experimentales. De su definición dependen "el análisis del método inductivo, la dilucidación de la estructura lógica de las pruebas científicas, de las explicaciones, de las predicciones, una enunciación rigurosa del concepto empirista de significación", afirma **Hempel**[75]. Sin ella, el concepto de lógica inductiva quedará vacío. Esa definición formal del concepto de confirmación parecía obvia, tanto que no se pensaba siquiera en buscarla. Ahora bien, incluso considerado bajo una forma restringida, el problema se ha revelado como casi insoluble en el marco de una lógica inductiva clásica: "Sucede que la idea aparentemente inocente de ejemplos positivos de una generalización encierra complicaciones inesperadas"[76].

No hemos aportado ninguna "prueba" de la imposibilidad total de resolver ese problema sin consideraciones probabilitarias. Pero, al menos, hemos mostrado que los esfuerzos de los más hábiles lógicos habían sido infructuosos hasta ahora.

El último problema que acabamos de examinar era aparentemente sencillo; la ambición del análisis extremadamente limitada. No se trataba ni de aportar pruebas de las inducciones, ni siquiera de determinar las reglas que gobiernan el proceso inductivo, sino simplemente de contribuir a una teoría de la estructura de la ciencia mediante la definición de un concepto muy elemental, cuyo uso es constante y sin el cual es imposible la comprensión de las ciencias experimentales. Los métodos de análisis formal no probabilitarios no han podido aportarle una solución satisfactoria. Se comprende que, en esas condiciones, se haya pensado que un análisis del conocimiento experimental debía pasar necesariamente por una teoría de la probabilidad y que la lógica inductiva sería probabilitaria o no sería.

---

[74] **Hempel** estima su teoría como más elemental que una doctrina del grado de confirmación y como lógicamente primera con relación a ella (*P.S.D.*, § 1). **Scheffler** afirma que "las distinciones de grados [de confirmación] no tienen ninguna relación directa con [el] proyecto [de definir un concepto de confirmación] pero son compatibles con él. (*A.S.*, 2ª parte, cap. 6, p. 202)"

[75] *P.S.D.*, § 1, p. 122.

[76] **Scheffler (I.):** *A.S.*, 2ª parte, cap. 5, p. 184.

CAPITULO III

LAS TEORIAS DE LA INFERENCIA ESTADISTICA

La teoría de la inferencia estadística constituye una aplicación esencial del cálculo de probabilidades. Juega un papel de primer orden en la investigación experimental. Toda ciencia que trate de los fenómenos de masa, y en la que la teoría de las variables aleatorias proporcione un marco conceptual adecuado, debe apelar necesariamente a las técnicas de inferencia estadística. La utilización de sus conceptos y de sus métodos ocupa un lugar tan importante en las ciencias humanas que parece indispensable para su matematización. Por otra parte, la teoría de la inferencia estadística es ampliamente conocida del público filosófico por el uso que se hace de ella en psicología y sociología. Pero sería un error pensar que su empleo se limita a ciertos dominios particulares. Por medio del problema de los errores de observación, e independientemente de toda consideración sobre el aspecto probabilitario de la ciencia moderna, la inferencia estadística está omnipresente en la investigación experimental. En efecto, no hay teoría satisfactoria de los errores de observación más que en términos de variables aleatorias y la solución de los problemas planteados exige el empleo de los métodos de inferencia estadística.

El desarrollo de esta disciplina no se ha producido sin resonancia sobre la filosofía de la inducción. Consideremos las cuestiones que trata, los conceptos que utiliza. Parece que no son ajenos a la problemática tradicional de la inducción. Se trata de inferir, de las características de una muestra, las de la población de la cual está extraída. ¿No es acaso decir que la inferencia estadística nos enseña cómo pasar de lo particular a lo general? Los estadísticos no tienen apenas reparo en utilizar esta terminología que evoca irresistiblemente el planteamiento clásico del problema de la inducción. Se pretende asimismo constituir planes de experiencia, es decir, determinar los datos experimentales que deben ser recogidos para confirmar una hipótesis, fijar los procedimientos más económicos, más rápidos, los más seguros para juzgar acerca de su validez. O bien se pretende que la inferencia estadística "contraste" las hipótesis, es decir, que asigne la probabilidad que conviene otorgarles en función de los datos experimentales recogidos. Se proponga reglamentar la conducción de las experiencias por hacer o gobierne el uso de las experiencias ya hechas, la teoría científica de la inferencia estadística parece tomar a su cargo –al menos parcialmente– los problemas que dependían tradicionalmente de una filosofía de la inducción. ¿No brinda acaso el ejemplo de una teoría probabilitaria de la inducción, constituida por los hombres de la ciencia, independientemente de toda problemática filosófica?

Fuera de las declaraciones explícitas de las que ya hemos dejado constancia[1], la terminología adoptada por los estadísticos, la descripción que proponen del objetivo de su ciencia, el propio título de sus trabajos, dan algún fundamento a esta interpretación. Por ejemplo, en un artículo titulado *The logic of inductive inference,* **R. A. Fisher** habla como si el conjunto del razonamiento inductivo dependiera de la inferencia estadística. Atribuye a **Bayes,** a quien discute ciertos principios pero reconoce su mérito, el privilegio de ser "el primero en haber visto la importancia del desarrollo de una teoría exacta y cuantitativa del razonamiento inductivo, del argumento que lleva de los hechos de observación a las teorías que pueden explicarlos"[2]. **Bayes** sería el primero en haber intentado racionalizar la inducción y en haber comprendido que esta racionalización debería hacerse en términos de probabilidades[3]. En suma, los conceptos de la inferencia estadística se presentan como los conceptos necesarios y suficientes para construir una teoría general de la inducción[4]. Cierto que tales afirmaciones, de las que se podrían encontrar otros ejemplos en otros autores, van acompañadas, por otra parte, de restricciones y precisiones que les quitan su carácter tajante. Pero el hecho es que son frecuentes y corresponden a una visión corrientemente extendida: la lógica inductiva probabilitaria, necesaria, parece, para constituir una teoría formal de la inducción, existiría ya: se identificaría con la teoría de la inferencia estadística.

De manera más modesta, se podría al menos pretender que esta disciplina, sin constituir por sí misma una lógica inductiva, debe ser tomada como modelo cuando se quiere construir una teoría de ese tipo. Nos enseñaría cómo deben plantearse los problemas de la inducción y nos mostraría, ante todo, que su solución presupone el uso del concepto de probabilidad o de nociones próximas, tal como el concepto de verosimilitud. Quedaría a cargo del epistemólogo descubrir cómo deben ser utilizados esos conceptos y a qué transposiciones se deben someter los resultados adquiridos para que se integren en una teoría general de la inducción.

Pero ya constituida una lógica inductiva, o simplemente su modelo, la teoría de la inferencia estadística corre el riesgo de forzar al epistemólogo a alejarse mucho de las formulaciones clásicas del problema de la inducción en la medida en que querrá tener en cuenta el aspecto que reviste desde hace algunos años. Se encuentra, en efecto, que esta teoría se ha presentado largo tiempo bajo la forma de una disciplina cuya unidad dejaba que desear: teorías de la estimación del punto o del intervalo, planes de experiencia, tests de hipótesis, eran desarrollos cuyos lazos resultaban evidentes, pero que no se enraizaban en una doctrina más amplia de la que habrían sido ramas particulares. No ocurre eso hoy. Desde 1950 más o menos, la teoría de la inferencia estadística está en posesión de una conceptualización y de una problemática que le confieren unidad; se presenta como una teoría general de la decisión

1 Cf. Introducción.
2 *D. E.*, cap. 1, § 3.
3 *U. I.*, pp. 246-267.
4 *S. M.S.I.*

estadística. **Abraham Wald** es, sin discusión, el autor que más ha contribuido a darle ese nuevo aspecto. Buscando una formulación general de los problemas de inferencia que englobe todos los desarrollos clásicos, la ha encontrado en el concepto de decisión. Un feliz encuentro con la teoría de juegos, cuya invención es debida a **Von Neumann**, y cuyos objetivos eran en su origen muy distintos, ha permitido el desarrollo de una teoría particularmente elegante y fecunda. Si fuera preciso formular, en términos no técnicos, el problema general al que aporta una respuesta la teoría de la inferencia estadística, nos inclinaríamos a decir que es la ciencia de las decisiones que es razonable adoptar en las circunstancias que dejan lugar a la falta de certeza.

La forma que ha tomado la teoría de la inferencia estadística ¿no es acaso una invitación a someter a la misma transformación la problemática de la inducción? La historia enseña que un problema que permanece insoluble tanto tiempo está imperfectamente formulado. ¿No es el caso de los problemas de la inducción? Sospechábamos ya que una lógica de la inducción, suponiendo que sea posible, exige que se hable de ella en términos de leyes probables. Pero, quizás, la reforma necesaria debe ser más profunda. Exigiría, si no que se renuncie a considerar la ciencia como un medio de conocimiento, al menos que se rechace emprender el análisis mutilándola de su dimensión práctica. La ley científica debería concebirse como una estrategia adoptada frente a un universo parcialmente desconocido. Su objetividad se definiría en función de su conformidad con las normas de la acción eficaz. Así, el análisis de la constitución de las representaciones científicas sólo se aclararía a partir del momento en que se viera en ellas una serie de decisiones concernientes a la acción a adoptar. Habría que justificar la ciencia en términos de la "best strategy". Tal es la idea, corrientemente extendida y de sugestiva apariencia, adoptada por todos los que pretenden que el modo de recorte "operatorio" de los fenómenos que introduce la teoría de la decisión abre una vía nueva a la inteligibilidad de la ciencia.

Pero la transferencia a la epistemología de los conceptos científicos no es algo obvio, como tampoco lo es la explotación filosófica de algunos resultados científicos. Lejos de nosotros negar que la teoría de la decisión "se opone a una simple teoría de las causas... en que hace intervenir, a la vez, un complejo aleatorio y un optimum, por una parte, y en que articula, por otra, un aparato *de información* y un aparato de acción"[5]. En este sentido, constituye una disciplina de un nuevo tipo y reclama un modo de reflexión original por parte del epistemólogo. Pero nos preguntamos si trae con ella un nuevo modo de inteligibilidad de la obra científica, sea porque construya por sí misma una epistemología de las ciencias inductivas, sea porque el uso de sus conceptos, de su problemática, de algunos de sus resultados, constituya la mejor vía de acceso a la comprensión de esas ciencias. Nos inclinamos a responder negativamente a esta cuestión.

No se trata de poner en tela de juicio la legitimidad de los métodos de inferencia

[5] Cf. **Granger** (G.–G.): *P.F.S.H.*, § 4.23, p. 104.

estadística. Vamos más lejos: es difícil negar que ciertos problemas que dependen de una teoría de la inducción reciben, en el marco de esta disciplina, una respuesta científica validada. En un sentido, no es ilegítimo presentar la inferencia estadística como una teoría del razonamiento inductivo. Pero creemos que únicamente son de la competencia de esta disciplina los problemas que se plantean en un contexto científico determinado. En otros términos, si aporta resultados considerables en lo que atañe a la inducción secundaria, permanece muda cuando se la interroga a propósito de la inducción primaria. Hay más: entre los conceptos más ricos que utiliza, son poco numerosos aquéllos cuya traslación a una teoría general de la inducción primaria sea concebible, y todavía menos numerosos los que allí recibirían un uso distinto de la mera retórica.

Este capítulo está consagrado al examen de las teorías de la inferencia estadística. Nos limitaremos a exponer su conceptualización, su problemática y a evocar los tipos de resultados obtenidos. Nuestra exposición será necesariamente superficial y se ceñirá al estudio de las etapas esenciales del desarrollo de esta disciplina. Esperamos que su carácter "panorámico" será disculpado si se toma en consideración nuestro objetivo: mostrar que la teoría de la inferencia estadística no constituye en sí misma esa teoría formal de la inducción que espera el epistemólogo y dejar entrever, desde ahora y ya, las dificultades que encuentra la transposición de sus conceptos y la extensión de sus métodos a una teoría general de la inducción.

1. El problema de la inferencia estadística: las soluciones Bayesianas y el concepto de verosimilitud

Cuando las cuestiones de inferencia estadística han aparecido en la literatura matemática, han sido estimadas como especificaciones del problema general de la "probabilidad de las causas". A este título, se ha buscado una solución en la aplicación del teorema de **Bayes**. En el momento en que se ha tomado conciencia de las dificultades que encuentran las soluciones de este tipo es cuando se ha sentido la exigencia de una conceptualización y de una problemática propias de la teoría de la inferencia estadística.

El problema de la probabilidad de las causas puede formularse sencillamente en términos no-técnicos: dado un suceso B, se puede determinar un conjunto de sucesos que pueden ser causas de él, es decir, que confieren a la aparición de B probabilidades determinadas y no-nulas. Sabiendo que se ha producido el efecto B, calcular la probabilidad de cada una de las causas posibles. Empleando el vocabulario de las álgebras de sucesos[6], llamando simplemente hipótesis a los sucesos que son tratados como tales, formularemos así ese problema: sea B un suceso y $(A_i)_{i \in I}$ una familia de hipótesis. Supongamos que esas hipótesis se excluyen mutuamente por pares y

[6] En lo que concierne al vocabulario técnico empleado en este capítulo, remitimos al lector al apéndice 3.

constituyen una familia exhaustiva, es decir que $A_i \wedge A_j = \overline{0}$ si $i \neq j$, y $\bigvee_{i \in I} A_i = \overline{1}$. Llamamos *completa* a una familia de este tipo, cuya finitud no se supone en modo alguno. El problema de la probabilidad de las causas es determinar las probabilidades condicionales $p(A_i/B)$. Naturalmente, sólo tiene sentido si el álgebra de sucesos considerada está probabilizada. Si ocurre así, se tiene:

$$p(B) = \sum_{i \in I} p(A_i \cdot B) = \sum_{i \in I} p(B/A_i) \cdot p(A_i).$$

Pero: $p(A_i \cdot B) = p(A_i/B) \cdot p(B) = p(B/A_i)p(A_i)$; se concluye de ahí:

$$p(A_i/B) = \frac{p(B/A_i) \cdot p(A_i)}{\sum_{i \in I} p(B/A_i) \cdot p(A_i)} \tag{1}$$

Tal es el resultado conocido bajo el nombre de teorema de **Bayes**. Se puede denominar *verosimilitud* de la hipótesis A_i, cuando B es conocido como verdadero, la probabilidad de B si A_i es verdadera [dicho de otro modo, $p(B/A_i)$]. Es corriente llamar *probabilidad a priori* de A_i, a $p(A_i)$, que se interpreta como la medida de la probabilidad que se está dispuesto a conferir a A_i, independientemente de todo conocimiento concerniente a la producción o a la no-producción del suceso B. Del mismo modo, la cantidad $p(A_i/B)$, que denota la probabilidad que conviene dar a A_i cuando se sabe que B es verdadero, se denominará *probabilidad a posteriori* de la hipótesis A_i.

Antes de ir más lejos, importa señalar una aplicación importante del teorema de **Bayes**: dado un suceso, se trata de determinar su probabilidad a partir de una medida de su frecuencia en una serie de pruebas de longitud determinada. Por ejemplo, se han sumado, en 1.000 tiradas de una moneda, 480 "cruces", o en 10.000 nacimientos, 5.200 nacimientos de varones. Se pide determinar, a partir de esos resultados, la probabilidad de que el resultado de una tirada sea cruz, o de que nazca un varón. Se supone, sea bien entendido, que esas probabilidades son constantes y que la aparición de un suceso en una prueba es independiente de su aparición en otra prueba. En esas condiciones, si la probabilidad del suceso es igual a p, la aparición de s sucesos en una serie de n pruebas tiene la probabilidad $C_n^s p^s (1-p)^{n-s}$.

Que p tenga un valor determinado constituye una hipótesis cuya verosimilitud es igual a $C_n^s p^s (1-p)^{n-s}$ cuando se han observado s ocurrencias del suceso en una serie de n pruebas; los diversos valores de p constituyen una familia completa de hipótesis. Se vuelve así a una cuestión de probabilidades de las causas. Pero, para resolverla, es preciso conocer la probabilidad *a priori* de que la probabilidad del suceso tenga un valor determinado. Si se trata p como una variable aleatoria y si se le atribuye una función de distribución *a priori* que defina una densidad $f(p)$, el teorema de **Bayes** permite determinar la probabilidad *a posteriori* de que p esté comprendida en el

intervalo $[p', p'']$, si la frecuencia del suceso es s en una serie de n pruebas. Designaremos esta probabilidad por $P([p', p'']/f_n^s)$. Se tiene:

$$P([p', p'']/f_n^s) = \frac{\int_{p'}^{p''} C_n^s p^s (1-p)^{n-s} f(p)\, dp}{\int_0^1 C_n^s p^s (1-p)^{n-s} f(p)\, dp} \qquad (2)$$

Naturalmente si $f(p)$ está acotada, la probabilidad *a posteriori* de que p tenga un valor determinado es siempre nula. Además, se tiene: $\int_0^1 f(p)\, dp = 1$, dado que p es una variable aleatoria que toma sus valores en el intervalo [0, 1]; se ha asegurado, pues, la convergencia de las integrales que figuran en la fórmula (2), que permite calcular la probabilidad a partir de la frecuencia y responde así a un problema clásico conocido con el nombre de "problema de la inversión del teorema de **Bernouilli**"[7]. Pero, ¿cómo determinar la densidad $f(p)$?

El punto esencial a señalar es que el cálculo de probabilidades *a posteriori* supone el conocimiento no sólo de las verosimilitudes, sino también de las probabilidades *a priori*. Ahora bien, si en las aplicaciones del teorema de **Bayes** se tienen a menudo buenas razones para asignar valores determinados a las primeras, es raro que ocurra lo mismo en lo que atañe a las segundas. Un uso extendido hace que, en ausencia de razones contrarias, se atribuyan valores iguales a las probabilidades *a priori* y es este uso el que es discutible. En el caso presente, se podrá tomar $f(p) = 1$, lo que corresponde a la idea de que ningún valor de p es, *a priori*, más probable que otro[8]. Se en-

---

[7] Recordemos que el teorema de **Bernouilli** prueba que la probabilidad de que $|f_n^s - p|$ sea más pequeña que ϵ (con $\epsilon > 0$) tiende hacia 1 siempre que n crezca. Atañe al valor de la frecuencia, suponiéndose conocida la probabilidad. Aquí se procede a la determinación inversa. Bajo ciertas condiciones relativas a la densidad *a priori* $f(p)$, se podría mostrar que si se tiene $p' = f_n^s - \epsilon$ y $p'' = f_n^s + \epsilon$, la cantidad dada por la fórmula (2) converge hacia 1 cuando n crece.

Se dispone hoy, por otra parte, de teoremas mucho más fuertes que el teorema de **Bernouilli.** Tal es, por ejemplo, el teorema de **Glivenko:** "Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ variables aleatorias que constituyen una muestra (es decir, independientes y de la misma ley de repartición). Sea $F(x)$ su ley de repartición común, $F_n(x)$ la ley de repartición empírica de la muestra (en otros términos, se tiene $F_n(x) = n(x)/n$, si $n(x)$ designa el número de variables observadas cuyo valor no es superior a x y n el tamaño de la muestra). Sea $d_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|$. Se tiene $P(\lim_{n \to \infty} d_n = 0) = 1$". Dicho de otro modo, la función de repartición de una muestra converge uniformemente en probabilidad hacia la función de repartición de la población de la que se ha extraído, cuando el tamaño de la muestra crece. (Cf. **Renyi** (A.): *C.P.*, cap. 7, § u, pp. 378-379). Teoremas debidos a **Smirnov** y **Kolmogorov** precisan las condiciones de esta convergencia en el caso en que se satisfagan condiciones muy débiles (continuidad de la función de repartición). (*Ibid.*, cap. 8, § 10, p. 463.) Hagamos notar que el teorema de **Bernouilli** es una particularización del teorema de **Glivenko:** concierne al caso de una variable aleatoria cuyo dominio de variación se reduce a los dos valores 0 y 1.

[8] En rigor, la probabilidad de que p tenga un valor determinado es siempre nula, pero se supone que la probabilidad de que p pertenezca a un sub-intervalo determinado es proporcional a la longitud de ese intervalo.

cuentra entonces que la densidad *a posteriori* de p tiene un máximo para f_n^s. Como veremos más adelante, ese tipo de razonamiento ha sido aplicado por **Laplace** a la solución del problema de **Hume.**

Es claro que el uso del teorema de **Bayes** que acabamos de describir plantea ya cuestiones: ¿con qué derecho se trata la probabilidad de un suceso aleatorio como una variable aleatoria? ¿Es acaso una variable aleatoria esa magnitud por el hecho de ser desconocida? ¿Con qué derecho se le atribuye una densidad determinada? Estas cuestiones se plantearán *a fortiori* cuando se tomen en consideración los problemas clásicos de estimación.

Esos problemas son del siguiente tipo: sea Π un conjunto de objetos del que diremos que constituye una población: por ejemplo, el conjunto de los electores o de los contribuyentes franceses, de los átomos de radium contenidos en una masa determinada, de las espigas de trigo plantadas en Francia este año, constituyen poblaciones. Cada uno de los elementos de estas poblaciones puede ser determinado por ciertas características, cuantitativas o no; los electores por el hecho de que otorgan su sufragio a tal partido; los contribuyentes, por su edad, su renta imponible; los átomos, por el momento en que se desintegran; las espigas, por el peso de grano que llevan, su fecha de maduración, etc... En función de esas características se pueden definir ciertas *magnitudes* que sirven para *describir* la población: proporción de electores que votan a un partido determinado; edad media de los contribuyentes y coeficiente de correlación entre la edad y la renta imponible; proporción de átomos que se descomponen antes del instante t, etc... Corresponde al estadístico definir con toda libertad esas magnitudes, denominadas *parámetros* de la población y que, naturalmente, no son todas ellas buenos medios de descripción. El problema de la inferencia estadística es entonces el siguiente: ocurre que el examen de todos los elementos de la población, y por tanto una medida directa de los parámetros, es imposible. Se trata de determinar esos parámetros a partir del examen de algunos elementos que constituirán lo que se llamará una muestra. Ese problema se llama problema de *la estimación* de los parámetros de la población.

Sea Π la población y E la muestra extraída de Π. Sucede muy frecuentemente que, en una situación determinada, es legítimo suponer que la posesión de ciertas características por parte de los elementos de E es un suceso aleatorio, cuya probabilidad será conocida si ciertos parámetros que describen Π lo fueran. En suma, el examen de la muestra puede concebirse como la observación del valor de ciertas variables aleatorias cuyas funciones de repartición pertenecen a familias paramétricas definidas, siendo los parámetros los de la población que se intenta estimar. Incluso es frecuente que una aserción suplementaria sea legítima: sean x_i y x_j dos elementos de E, el hecho de que x_i o x_j posean un carácter determinado son sucesos aleatorios de la misma ley de repartición e independientes. En esas condiciones, si E comprende n elementos, su examen puede concebirse como la observación de n variables aleatorias independientes y de la misma ley de repartición. Tal es el caso si la muestra puede estimarse como una muestra aleatoria (*random sample*) extraída de una población infinita o,

al menos, muy grande con relación a ella[9]. De manera totalmente general y abstracta, formularemos así el problema de la estimación. Dadas las variables aleatorias $z_1, z_2, ..., z_n$, cuyas leyes de repartición pertenecen a familias definidas que dependen únicamente de los parámetros $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$, estimar $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ después de haber observado los valores de algunas de esas variables aleatorias.

Numerosos problemas pueden subsumirse bajo esta cuestión general. Tal es el caso de la determinación del verdadero valor de una magnitud a partir de una serie de medidas. La observación de un resultado determinado en una operación de medida puede concebirse como una observación del valor de una variable aleatoria que depende de la magnitud medida como un parámetro. A propósito de los errores de observación, pueden introducirse ciertas hipótesis plausibles, bastante simples y relativamente débiles. Permiten determinar la forma de la función de repartición de esta variable aleatoria[10]. Si se efectúan medidas y se supone que son independientes, como es patente muy a menudo, el problema viene a ser la determinación del parámetro de la ley de repartición común a n variables aleatorias.

Pero, ¿se pueden resolver los problemas de estimación mediante la aplicación del teorema de **Bayes**? Situémonos en el caso más simple: se han observado los valores $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$ de n variables aleatorias independientes y de la misma ley de repartición. Esta ley de repartición $F(z, \theta)$ corresponde a una familia que depende de un solo parámetro. El uso del teorema de **Bayes**, que supondría la definición de una densidad $f(z, \theta) = \dfrac{dF(z, \theta)}{d\theta}$, exigiría que se asignaran probabilidades *a priori* a los diversos valores de θ. ¿Es razonable proceder así?

Independientemente del hecho de que disgustaría a ciertos autores, inspirados por una teoría empirista del conocimiento, hacer intervenir un conocimiento *a priori* en la determinación de una magnitud experimental, muy serias razones militan en favor de una respuesta negativa.

Ignorando todo el valor de θ antes de la observación, no se puede decir nada *a priori*[11] respecto de su función de repartición. Recurrir al principio de indiferencia, afirmar que se pueden suponer todos los valores como igualmente probables, dado que no se sabe nada, es un mal argumento. Si ese principio tiene un uso legítimo, lo que no se excluye en modo alguno, ese uso es muy distinto: se pueden estimar como igualmente probables sucesos tales que se pueda afirmar que no hay ninguna razón para que se produzca uno más bien que otro, no sucesos de los que no se sabe nada. Además, el principio de indiferencia puede llevar a ciertas dificultades

---

[9] La introducción de poblaciones infinitas ficticias no plantea ningún problema particular. Tienen el mismo estatuto que los otros conceptos científicos llamados "teóricos".

[10] Se admite en general que es gaussiana, siendo su medida la magnitud a medir.

[11] Cf., por ejemplo, **Neyman (J.)**: *O.T.S.E.*, p. 344, y **Fisher (R.A.)**: *S.M.S.I.*, cap. 2, § 2 (*passim*). En este último texto, **Fisher** recuerda la crítica sistemática de **Boole**, evocada muy a menudo en su obra.

matemáticas; hay casos en que la estimación por medio del teorema de **Bayes**, con equiprobabilidad *a priori*, lleva a atribuir al parámetro una función de repartición que no tiene los caracteres que debe poseer toda función de repartición[12]. Pero hay, sobre todo, dos argumentos decisivos que condenan esta solución del problema de la estimación:

1.º Si se invoca el principio de indiferencia para determinar la ley *a priori* del parámetro θ, del cual no se conoce nada, el mismo argumento se aplicaría a toda función de θ. Sea $\theta' = \varphi(\theta)$, siendo φ una aplicación inyectiva. La ley de repartición de z es una función que depende de θ, del tipo $F(z, \theta)$. Pero está claro que es también una función de θ' determinada por la ecuación siguiente: $F'(z, \theta') = F(z, \varphi^{-1}(\theta'))$. Según que se razone a partir de F o a partir de F', suponiendo equirrepartido *a priori* sea θ, sea θ', se obtienen leyes de repartición *a posteriori* distintas. En suma, el uso que acaba de hacerse del principio de indiferencia es contradictorio: no se puede suponer como equirrepartido todo parámetro del que no se sepa nada, pues el mismo razonamiento se aplica a toda función del parámetro, lo que lleva necesariamente a una contradicción (salvo en el caso de que se trate de una función lineal). Tomemos de **Keynes** un ejemplo muy sencillo[13]: se sabe que el peso específico de una sustancia está comprendido entre 2 y 3. El principio de indiferencia lleva a afirmar que la probabilidad de que el peso específico pertenezca al sub-intervalo [2; 2,5] es igual a 1/2 (dado que la longitud de este intervalo es la mitad de la longitud del dominio de variación). Se concluye de ahí que la probabilidad de que el volumen específico corresponda al intervalo [1/2,5; 1/2], es decir, [2/5; 1/2], es 1/2. Pero el mismo razonamiento llevaría a asignar la probabilidad $\frac{1/2 - 2/5}{1/2 - 1/3} = 6/10$ al mismo suceso, si se aplicara el principio de indiferencia al volumen específico[14].

2.º Pero, sobre todo, ¿se pueden estimar los parámetros de una población como variables aleatorias? La que es aleatoria es la muestra, no la población de la que se extrae y cuyos parámetros son simplemente desconocidos. ¿No hay algún abuso en hablar de la probabilidad de que el número de los contribuyentes franceses cuyas rentas imponibles son superiores a 10.000 francos tenga un valor determinado, cuando ese número es una constante perfectamente definida? **Neyman** ha protestado contra la confusión entre constantes desconocidas y variables aleatorias[15]. **Fis-**

[12] Cf. **Neyman** (J.): *O.T.S.E.*, p. 344.

[13] *T.P.*, cap. IV, § 6, p. 45.

[14] **Keynes** propone otros ejemplos que prueban que las dificultades de aplicación del principio de indiferencia no atañen al solo caso de las variables aleatorias continuas. (*Ibid.*, pp. 42-46.) Son del tipo siguiente: ignorando el color de un objeto, puedo suponer, por aplicación del principio de indiferencia, que es igualmente probable que sea rojo y que no lo sea, que sea blanco y que no lo sea, etc... Así me veo llevado a atribuir a un número cualquiera de colores incompatibles una probabilidad *a priori* igual a 1/2, lo que es absurdo.

[15] *O.T.S.E.*, p. 431 y *E.S.P.C.* (al principio).

her ha señalado que esta confusión es la que lleva a forjar la ficción de las "poblaciones de poblaciones" a fin de dar un sentido a la idea de ley de distribución de un parámetro[16]. No se puede estimar esta confusión como una contradicción, y ciertas concepciones de la probabilidad la legitimarían, pero lo menos que puede decirse es que más vale evitarla puesto que implica un uso discutible del concepto de probabilidad.

La solución de los problemas de estimación mediante el principio de las probabilidades inversas, es decir, mediante empleo de esquemas bayesianos y aplicación del principio de indiferencia, tropieza pues con obstáculos insuperables. Es extraño que haya resistido a críticas fundadas y se presente como "el único ejemplo de una doctrina matemática aceptada por los hombres más eminentes y rechazada por los otros"[17]. Es verdad que fue largo tiempo el único método concebible para resolver los problemas de inducción. Según **Fisher**, si ocurrió así fue porque se quería tratar esos problemas en términos de probabilidad, creyendo que una doctrina de la inferencia exigía necesariamente ese concepto, y es ese dogma lo que sería preciso poner en duda[18].

Se considera que la probabilidad mide el grado de creencia que conviene atribuir a una hipótesis, pero se podría muy bien pensar que otra cantidad juega ese papel. **Fisher** pretende que se mida por *la verosimilitud* el grado de creencia que conviene atribuir a una hipótesis, tomando el término verosimilitud en el sentido técnico que le hemos dado al principio de este parágrafo. Señala que la verosimilitud es un concepto que, matemáticamente, se distingue profundamente de una probabilidad: la verosimilitud no tiene elemento diferencial, no puede ser integrada, es atribuida a una hipótesis particular o a un valor particular de un parámetro (y no a un intervalo) en un problema de estimación, y no es aditiva[19]. Pero cuando **Fisher** afirma que constituye una medida adecuada del grado de creencia racional[20], no puede oponérsele

---

[16] *N.P.L.*, p. 285.

[17] *I.P.*, p. 528. Esta descripción es un tanto discutible. Lo que se pone en cuestión es la legitimidad de las hipótesis sobre las que se funda la deducción matemática y no esta deducción misma.

[18] La adhesión al concepto de probabilidad cuando se trata de constituir una teoría del razonamiento inductivo se explica fácilmente. Según **Fisher,** se debería, no a razones propiamente filosóficas, sino a una argumentación que él describe así: "Un cierto número de juicios útiles, pero inciertos, pueden expresarse con exactitud en términos de probabilidades; nuestros juicios sobre las causas e hipótesis son inciertos; por tanto, la actitud racional con respecto a ellos se expresa en términos de probabilidades." Y añade que "esta hipótesis era casi necesaria, en vista de que no existía ningún otro instrumento matemático para tratar la falta de certeza". (*I.P.*, pp. 528-529.) La ausencia de otra teoría es, por tanto, lo que explica que la doctrina de las probabilidades inversas haya sobrevivido tanto tiempo a las críticas decisivas de **Boole, Venn, Chrystal.** Sin cesar, **Fisher** insiste sobre este punto.

[19] *F.T.S.*, § 6, p. 427, *I.P.*, p. 532. En el primero de estos textos, **Fisher** recalca que la verosimilitud debe distinguirse de la probabilidad lógica de **Keynes,** dado que esta última es aditiva. En el segundo, insiste sobre el hecho de que el concepto de "verosimilitud de A o B" no tiene ningún sentido cuando están definidas las verosimilitudes de A y de B.

[20] *I.P.L.*, p. 260, *I.P.*, p. 532, *L.I.I.*, p. 40, *S.M.S.I.*, cap. 3, § 1 (*passim*), *U.I.*, p. 246. En

ningún argumento *a priori*. Falta por saber cómo puede utilizarse ese concepto para resolver los problemas de estimación. **Fisher** pretende que se adopte el principio siguiente: tomar, para la estimación de un parámetro, los valores a los que la muestra da la mayor verosimilitud. Dicho de otro modo, en el caso en que se hayan observado los valores $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ de n variables aleatorias de la misma ley de distribución y cuya densidad es $f(z, \theta)$,[21] maximizar $\prod_{i=1}^{n} f(\zeta_i, \theta)$. El valor de θ será evidentemente solución de la ecuación:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(\zeta_i, \theta) = 0.$$

La obra de **Fisher** se presenta como la primera tentativa que se haya hecho para resolver los problemas de estimación sin recurrir a los esquemas bayesianos. Se comprende fácilmente que se haya podido conferir una resonancia filosófica a la exclusión de las probabilidades *a priori* que autoriza. Pero importa igualmente ver que está estrechamente ligada a la introducción de un concepto nuevo, el de verosimilitud, que es presentado como un paradigma para la medida del grado de creencia. Ahora bien, si no puede oponerse ningún argumento *a priori* a este proyecto, que implica una reforma profunda del modo de pensamiento del estadístico, no por eso era menor la obligación de **Fisher** de justificar su elección mostrando la ventaja de su método. En otros términos, debía mostrar que las estimaciones de la máxima verosimilitud gozaban de un cierto número de propiedades interesantes. Ese propósito le condujo a desarrollos que le convierten en el precursor de toda la estadística contemporánea.

Sea una muestra extraída de una población o, para hablar en términos de variables aleatorias, una serie de observaciones de los valores $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ de n variables aleatorias $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Llamamos estadístico a toda función de esos valores: $f_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Un estadístico es, naturalmente, una variable aleatoria cuya ley de repartición se determina una vez conocida la ley de repartición conjunta de $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Supongamos que esta última ley corresponde a una familia paramétrica determinada. Incluso si se ignora el valor de los parámetros, se pueden determinar ciertas propiedades de las leyes de repartición de los estadísticos. Estimar uno o varios parámetros es siempre tomar un estadístico de las observaciones como valor supuesto del o de los parámetros. Después de lo que se acaba de decir, será posible

---

este último texto, **Fisher** hace notar que "no hay hasta ahora ninguna garantía de que ni siquiera la probabilidad y la verosimilitud tomadas conjuntamente bastarán para la especificación de toda especie de falta de certeza lógica que pudiera ser discutida de manera fructífera". En *N.P.L.* (§ 1, p. 287), **Fisher** otorga un privilegio a la verosimilitud en lo que concierne al análisis del razonamiento inductivo: en tanto que la probabilidad conviene cuando se trata de inferir de lo general a lo particular, es la verosimilitud la que es adecuada para el análisis de la inferencia de lo particular a lo general.

[21] Para simplificar la exposición, suponemos la unicidad del parámetro. Los resultados se generalizan fácilmente en el caso de una ley correspondiente a una familia definida por n parámetros: se obtiene entonces un sistema de n ecuaciones del tipo precedente.

comparar entre sí las diversas estimaciones disponibles. Tal es la idea maestra de la teoría fisheriana de la que vamos a brindar algunas aplicaciones a título de ejemplo: sea θ un parámetro de una población Π y $\theta(E)$ un estadístico de la muestra E. Se dice que $\hat{\theta}(E)$ es una estimación consistente de θ, si $\hat{\theta}(E) = \theta$ cuando la muestra E es idéntica a Π, o si $\hat{\theta}(E)$ converge en probabilidad hacia θ cuando E crece, en el caso de que Π fuera infinita[22]. Una estimación es *no sesgada* si su esperanza matemática es igual al valor de ese parámetro, valor que permanece desconocido[23]. Elegir un estadístico no sesgado es asegurarse de que la estimación de este estadístico no lleva a un error sistemático, es decir, no da valores sistemáticamente demasiado grandes o demasiado pequeños en probabilidad. Por último, una estimación $\hat{\theta}(E)$ se llamará suficiente si, entre todas las estimaciones posibles, es ella la que minimiza la esperanza matemática de la varianza con relación al verdadero valor del parámetro[24]. Eligiendo un estadístico tal, se tiene la certeza de minimizar la esperanza del cuadrado de la desviación del verdadero valor, que permanece desconocido. De un estadístico suficiente se puede decir que agota la información contenida en la muestra a propósito del parámetro a estimar.

En la medida en que existan, será natural buscar estimaciones que tengan todas las propiedades que acabamos de enumerar o propiedades próximas. Lo esencial de la obra de **Fisher** consiste en mostrar que las estimaciones de la máxima verosimilitud tienen, en numerosos casos, propiedades que permiten estimarlas como satisfactorias. Son invariantes en una transformación de los parámetros[25] y, para numerosas leyes de repartición, tienen algunas de las propiedades antes citadas[26]. Pero de ahí a decir que son siempre perfectamente satisfactorias hay un paso que no se podría dar. Por ejemplo, se puede establecer que, incluso en casos muy simples, esas estimaciones no son no sesgadas, sino solamente asintóticamente no sesgadas[27]

---

[22] Una estimación está definida por una serie de funciones $f_1, f_2, \ldots$, cuyo número de argumentos está indicada por los índices. La estimación será consistente si $f_n(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ converge en probabilidad hacia θ cuando n crece.

[23] En otros términos, para todo n, se deberá tener $E(f_n(z_1, z_2, \ldots, z_n)) = \theta$, sea cual sea n.

[24] Si $\hat{\theta}$ es una estimación suficiente, para toda otra estimación $\hat{\theta}'$ se tiene: $E((\hat{\theta} - \theta)^2) \leqslant \leqslant E((\hat{\theta}' - \theta)^2)$.

Fisher define la eficiencia de $\hat{\theta}'$ con relación a $\hat{\theta}$, como la relación $E((\hat{\theta} - \theta)^2)/E((\hat{\theta}' - \theta)^2)$. Está claro que es ventajoso elegir, entre dos estimaciones, la más eficiente. A falta de una estimación que sea suficiente, se tomará una estimación "asintóticamente suficiente", se exigirá además que sea "asintóticamente no sesgada".

[25] Si se sustituyen los parámetros $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ de la ley de distribución f, por los parámetros $\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_n$, ligados a los precedentes por las ecuaciones $\theta'_1 = \varphi_i(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$, las estimaciones de la máxima verosimilitud de los dos grupos están ligadas por las ecuaciones: $\hat{\theta}'_i = \varphi_i(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_n)$. La ausencia de esta propiedad es la que condenaba los esquemas bayesianos.

[26] Se puede probar no sólo que son asintóticamente suficientes con respecto a la clase de las estimaciones que tienden hacia una distribución normal, sino que lo son con respecto a clases más amplias. (Cf. **Wald,** (A.): *P.S.I.*, cap. 3.)

[27] Cf. **Neyman** (J,): *O.T.S.E.*, pp. 345-346. Si las variables aleatorias son independientes y tienen como ley de repartición común una ley normal, la estimación de la varianza de esta ley por la máxima verosimilitud no es no sesgada. En efecto, si ζ designa la media aritmética de las

Podrían inventarse otros métodos más eficaces. Además, el método de la máxima verosimilitud sólo permite resolver ciertos problemas de estimación. Ocurre frecuentemente que no se tiene en absoluto necesidad de atribuir a un parámetro un valor definido, sino que basta con fijar un dominio al que pertenece (muy a menudo ese dominio es un intervalo). La noción de verosimilitud, que no es aditiva, no contribuye de ninguna manera a la solución de ese tipo de cuestiones denominadas problemas de estimación de intervalo; por oposición a las precedentes, que se denominan problemas de estimación de punto. La teoría anteriormente desarrollada exige pues una extensión y **Fisher** es el primero en ser consciente de ello[28].

Una única razón podría justificar que se confiera al método de la máxima verosimilitud un privilegio de exclusividad. Reside en la significación que puede ser vinculada al concepto de verosimilitud. Si se admite que ese concepto es la única medida adecuada del grado de creencia de una hipótesis; se deberá elegir siempre la hipótesis más verosímil. Pero he ahí una tesis bien frágil que ni el propio **Fisher** pretende imponer de ningún modo. El hecho es que no será mantenida por sus sucesores, que se liberaron del dogma de la verosimilitud como él mismo se había liberado del dogma de los esquemas bayesianos. La ciencia de la estimación estadística se desarrollará bajo la forma de una disciplina que intenta volver a "una teoría clásica de la probabilidad"[29], entendamos por ello no que emplee los esquemas bayesianos, sino que se funda sobre el concepto clásico de probabilidad antes que sobre la noción de verosimilitud.

En la obra de **Fisher** se pueden distinguir dos aspectos: por una parte propone sustituir la probabilidad por la verosimilitud para medir el grado de creencia de una hipótesis, por otra parte, funda la teoría de los "estadísticos". Por este segundo aspecto, y no por el primero, es por el que **Fisher** ha marcado toda la historia contemporánea de la estadística.

2. De los tests de hipótesis a la teoría de la decisión

Acabamos de indicar cómo era necesario un planteamiento más flexible de los problemas de inferencia estadística. A este propósito responde la obra de Jerzy **Neyman**, que funda la célebre teoría de los tests de hipótesis. Siguiendo la exposición que de ella brinda **Wald**[30] vamos a presentar las ideas fundamentales de esta teoría.

ξ_i, la estimación por la máxima verosimilitud está dada por $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \xi)^2$, mientras que la estimación no sesgada corresponde a la elección del estadístico: $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \xi)^2$.

[28] De ahí su teoría de la probabilidad fiducial que anuncia los desarrollos de **Neyman** de los que vamos a hablar.

[29] Es lo que expresa nítidamente el título de un artículo de **Neyman:** *La estimación estadística tratada como un problema clásico de probabilidad.*

[30] Cf. *P.S.I.*

Sea $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$ un conjunto finito de variables aleatorias (con valor en R). Un conjunto de observaciones de los valores de esas variables se representa por un punto de R^n o de una parte de R^n, si el intervalo de variación de ciertas variables está acotado. Llamaremos *espacio muestral,* y designaremos por M, el dominio de variación del punto representativo de las observaciones. Se supone que la función de repartición conjunta de las variables aleatorias pertenece a una clase determinada, comúnmente a una familia paramétrica. Sea Ω esta clase. Las hipótesis a contrastar consistirán en afirmar que esta función pertenece a una parte propia ω de Ω. En el caso de una familia paramétrica, si ω se reduce a una función única, se encuentra de nuevo el problema clásico de la estimación. Pero pueden subsumirse otras cuestiones bajo esta formulación general: supongamos, por ejemplo, un conjunto de variables aleatorias, distribuidas normalmente y divididas en dos grupos: $z_1, z_2, ..., z_n$ y $z'_1, z'_2, ..., z'_m$. Se supone que las variables del mismo grupo tienen la misma ley de repartición y que son todas independientes. La función de distribución conjunta depende de 4 parámetros: las medidas m y m' de los dos grupos de leyes de repartición y sus varianzas σ^2 y σ'^2. Ω es identificable con una parte de R^4.[31] Se puede definir ω del siguiente modo: ω es la porción de hiperplano $m = m'$. Se reencuentra así un problema muy conocido: ¿tienen medias idénticas las variables de los dos grupos? Problema planteado a menudo en la forma siguiente: ¿es significativa la diferencia entre las medias de dos muestras? Vemos, por tanto, que el problema que acabamos de plantear engloba cuestiones que no trataba la teoría de la estimación. Podría ser, por otra parte, fácilmente generalizado, si se considerara una partición de Ω no en dos partes ω y $(\Omega - \omega)$, sino en n partes.

La cuestión es, pues, saber si se mantendrá la hipótesis $f \in \omega$ según las observaciones. Estando éstas representadas por un punto de M, definir un test es elegir una región R de M, llamada *región crítica,* y decidir que la hipótesis será mantenida si y sólo si el punto representativo de las observaciones pertenece a R. Supongamos que se pueda determinar R de tal manera que, para toda f que pertenece a ω, la probabilidad de que el punto representativo pertenezca a R sea igual a α. Es claro que si la hipótesis comprobada es verdadera, hay una probabilidad α de que sea mantenida si se elige R como región crítica y, por tanto, una probabilidad $(1 - \alpha)$ de que se la rechace cuando es verdadera. Se dirá que R define un test *de extensión* α. Pero si sólo se buscara evitar errores de ese tipo, el problema tendría una solución trivial: aceptando siempre una hipótesis, sean cuales sean los resultados de la observación (es decir, estableciendo $R = M$) ¡se estaría seguro de no excluir nunca una hipótesis verdadera! Para dar sentido al problema planteado, es pues necesario tener en cuenta un segundo tipo de error que consiste en aceptar una hipótesis falsa. Entre las regiones críticas de extensión determinada, es decir, que dan una probabilidad definida al error del primer tipo, interesa elegir aquéllas que minimizan el error del segundo tipo.

Pero, ¿qué sentido exacto daremos a este requisito? Sea f_0 una función de re-

[31] Notemos que se trata de una parte propia dado que σ^2 y σ'^2 son positivas.

partición que no pertenece a ω. Sean dos regiones críticas R y R' de extensión α con respecto a la hipótesis $f \in \omega$. La probabilidad de que se mantenga la hipótesis cuando la función de repartición es f_0, es decir, cuando la hipótesis es falsa, puede ser calculada; es, respectivamente, $p(x \in R/f_0)$ y $p(x \in R'/f_0)$. Si se tiene $p(x \in R/f_0) \leqslant p(x \in R'/f_0)$ se dice que R es más potente que R' para f_0. Si ocurre lo mismo para toda función f que no pertenece a ω (pudiendo ser verdadera la igualdad en ciertos casos, siempre que la desigualdad estricta lo sea al menos en un caso) se dice que R define un test *uniformemente más potente que* R'. Se dirá que R es *admisible* si no existe región de la misma extensión y uniformemente más potente. Además, si las probabilidades $p(x \in R/f)$ son constantes para toda función f que no pertenece a ω, esta probabilidad común define la potencia del test que es precisamente la probabilidad de cometer un error del segundo tipo cuando se adopta esta región como región crítica.

Ni que decir tiene que es necesario ceñirse a regiones críticas admisibles y útil elegir tests uniformemente más potentes en sentido absoluto (es decir, uniformemente más potentes que cualquier otro test de la misma extensión). Desgraciadamente, sólo en circunstancias excepcionales existen tests uniformemente más potentes.

Resultados negativos del mismo tipo vuelven a encontrarse en la teoría de los intervalos de confianza que está muy próxima a la teoría de los tests de hipótesis. Sea θ un parámetro; en lugar de estimarlo por medio de un punto, conviene a menudo determinar un intervalo y afirmar que θ pertenece a ese intervalo. **Neyman**[32] ha propuesto una formulación rigurosa del problema, que evita la introducción de las probabilidades *a priori*. Dada una muestra, se trata de determinar dos estadísticos $\underline{\theta}(E)$ y $\overline{\theta}(E)$ (que son variables aleatorias) tales que se tenga necesariamente $\underline{\theta}(E) \leqslant \overline{\theta}(E)$. El intervalo $[\underline{\theta}(E), \overline{\theta}(E)]$ será llamado intervalo de confianza de umbral α si se tiene:

$$P[\underline{\theta}(E) \leqslant \theta \leqslant \overline{\theta}(E); \theta] = \alpha.^{33}$$

Este problema no es exactamente del mismo tipo que el anterior, dado que la hipótesis sometida a prueba: $\underline{\theta}(E) \leqslant \theta \leqslant \overline{\theta}(E)$, varía con los resultados observados, pero es muy cercano a él. Ahora bien, si se toma en consideración el hecho de que es deseable que los intervalos de confianza tengan ciertas propiedades: que sean de

[32] *O.T.S.E.*, pp. 347-348.

[33] Las definiciones clásicas que utilizan los esquemas bayesianos tratan a θ como una variable aleatoria. Se define el intervalo de confianza a partir de la probabilidad de que θ pertenezca a un intervalo determinado: viene dado por estadísticos $\underline{\theta}(E)$ y $\overline{\theta}(E)$ que satisfacen: $p(\underline{\theta}(E) \leqslant \theta \leqslant \overline{\theta}(E), E) = \alpha$. La igualdad que acabamos de definir en el texto tiene una significación muy distinta: θ es una constante; $\underline{\theta}(E)$ y $\overline{\theta}(E)$ son dos estadísticos de la muestra, es decir, variables aleatorias. Se intenta determinar la probabilidad de que satisfagan la desigualdad $\underline{\theta}(E) \leqslant \theta \leqslant \overline{\theta}(E)$. Se pide que esa probabilidad sea igual (o superior) a α, sea cual sea θ.

longitud mínima, no sesgados[34], se llega a una multitud de resultados negativos. Por ejemplo, sólo en restringidos casos existe un intervalo de confianza no sesgado[35] más corto. Es verdad que, si se sustituyen estas propiedades por sus equivalentes asintóticas, es decir, si se supone simplemente que esas propiedades tienden a verificarse cuando crece el tamaño de la muestra, se está en posesión de una multitud de resultados positivos.

La teoría de los tests de hipótesis establece, por tanto, resultados dignos de consideración sin recurrir a los esquemas bayesianos. Pero algunos de los problemas que plantea permanecen sin respuesta. Son numerosos los casos en que los estadísticos no pueden tener conjuntamente todas las propiedades que se puede desear que posean. En casos semejantes, el saber del estadístico no impone la elección ni de un método de test, ni de un tipo de estimación determinado. A decir verdad, una elección tal depende siempre de la decisión y no del razonamiento. Corresponde a la matemática establecer que tal estadístico tiene una ley de distribución definida, no imponerla. Pero hay casos en que el saber es de tal naturaleza que indica claramente cuál es la elección más razonable; así, cuando se puede mostrar que, dos tests, uno es uniformemente más potente que el otro. En cambio, hay otros casos en que no ocurre lo mismo. En semejantes circunstancias, la decisión libre recobra plenamente sus derechos. Para insistir sobre este hecho, **Neyman** propone hablar de *comportamiento inductivo* más bien que de *razonamiento inductivo*[36]. Fórmula a menudo mal interpretada que, lejos de probar que la inferencia estadística resuelve los problemas inductivos cuando se los plantea en forma de la determinación de una regla óptima de comportamiento, debe recibir una significación opuesta: muestra que toda inducción implica un acto decisorio que está, por naturaleza, fuera del dominio de la teoría matemática de la inferencia estadística.

Es preciso, por tanto, hacer un sitio a la decisión desde el momento en que se trata de aplicar el saber estadístico. En esas condiciones, ¿no habrá ventaja en constituir la teoría de la inferencia estadística de tal manera que sea una doctrina de la decisión razonable frente a la falta de certeza? Muchas observaciones marginales, en los desarrollos clásicos, justifican que nos inclinemos hacia una respuesta positiva. En los problemas de test de hipótesis, sólo se disminuye la probabilidad de los errores de primer tipo acrecentando la de los errores de segundo tipo y recíprocamente. Asimismo, cuando se pasa a las aplicaciones, se tiene en cuenta la importancia relativa de esos dos tipos de errores para elegir un test. Del mismo modo, la elección de una estimación que minimiza la esperanza del error cuadrático no se justifica más

[34] Se habla de longitud del intervalo para la cantidad $E(\theta(E) - \overline{\theta}(E))$ que, de hecho, es la esperanza de la longitud y es, por tanto, función de θ. Se pueden definir así intervalos uniformemente más cortos que otros. Un intervalo será no sesgado si $E\frac{\theta(E) + \overline{\theta}(E)}{2} = \underline{\theta}$, sea cual sea θ.

[35] Cf. **Wald** (A.): *P.S.I.*, cap. 4.

[36] *G.T.S.E.*, § 4.

que si se admite que el cuadrado del error mide de alguna manera su importancia. Pero correspondería a **Wald**, quien por otra parte reconoce plenamente los méritos de sus predecesores[37], desarrollar sistemáticamente esas ideas que quedaban dispersas y fundar una teoría de la decisión estadística que se presenta como la forma más comprensiva de las doctrinas de la inferencia estadística.

Según **Wald**, las teorías clásicas se han constituido a partir de una problemática demasiado restringida: por una parte, los problemas tratados son esencialmente los de la estimación o del test de hipótesis; por otra parte, se suponen siempre los datos experimentales globalmente adquiridos[38]. Esas dos restricciones son las que interesa abandonar: ciertos problemas no se reducen a la elección de una sub-clase de una familia paramétrica de leyes de repartición; por ejemplo, sean n parejas de variables aleatorias de la misma ley de repartición, se pregunta si esas parejas están formadas por variables independientes; dicho de otro modo, si su función de repartición conjunta $\prod_{i=1}^{n} f(x, y)$ puede ponerse bajo la forma $\prod_{i=1}^{n} \varphi(x)\psi(y)$. Un problema tal no es un problema de estimación o de test en sentido clásico (**Neyman** se limita de hecho al caso de las familias paramétricas). Es posible tratarlo[39]. Pero no se ha formulado el problema general de la inferencia estadística de tal manera que incluya problemas de ese tipo. Expliquémonos ahora en lo que concierne a la segunda restricción a abolir: en los problemas clásicos, se pide al estadístico que decida si una hipótesis puede ser aceptada en función de ciertos resultados experimentales ya adquiridos. Parece excluido que su respuesta pueda ser que procede continuar la observación, incluso la teoría de los planes de experiencia se reduce a indicar cuál es la mejor organización "global" de un cierto número de datos experimentales. Sería interesante crear una teoría más amplia que, en el caso de los tests de hipótesis, deje sitio para las siguientes respuestas: o bien se acepta la hipótesis, o bien se la rechaza, o bien se indica que debe proseguirse la experimentación de una manera determinada, es decir, que se prescribe la lista de las variables aleatorias que es preciso observar antes de tomar una nueva decisión en la que se abrirán de nuevo esas tres posibilidades. *Sequential Analysis* estaba consagrado al estudio de un procedimiento de test secuencial: después de cada observación de una variable aleatoria, se decidía ya sea el rechazo de la hipótesis, ya sea su aceptación, ya sea la observación de una variable aleatoria suplementaria. El método estaba todavía limitado en el sentido de que concernía al caso de las variables aleatorias independientes e idénticamente repartidas y de que las observaciones se hacían necesariamente una a una. Pero **Wald** podía mostrar que los tests secuenciales economizaban las observaciones[40].

---

[37] *S.D.F.*, § 1.7, pp. 28-31.

[38] *S.D.F.*, Pr., p. V.

[39] Cf. **Wald** (A.): *P.S.I.*, cap. VI, donde se indican referencias.

[40] Sea un test secuencial que sólo mantiene una hipótesis si las probabilidades de errores de primero y segundo tipos son respectivamente inferiores a α y a β. Se puede calcular entonces el número medio de observaciones necesarias para que el test lleve a una conclusión: el "average

Los procedimientos que minimizan el número de observaciones sólo tienen sentido si la experimentación es "costosa" en un sentido que falta por determinar. Si no, siempre habría interés en proseguir indefinidamente la experimentación. Por eso, el desarrollo de una teoría de este tipo exigía que se tuviera en cuenta el coste de las observaciones y, por tanto, el coste de los errores. Es lo que se hará en la teoría de las funciones de decisión estadística, de la que vamos a exponer los conceptos fundamentales.

El problema general de la decisión estadística comporta la formulación siguiente: Se llama *proceso estocástico* a una serie finita o enumerable de variables aleatorias: $z_1, z_2 \ldots$, que poseen una función de distribución conjunta $F(z)$. Se supone que $F(z)$ pertenece a una clase definida Ω –comúnmente, una parte propia del conjunto de las funciones de repartición posibles–, que se llamará el conjunto de los *estados de la naturaleza.* Por otra parte, se define un conjunto D_t, llamado conjunto de las *decisiones terminales*, y una función numérica L sobre el producto cartesiano $\Omega X D_t$. El valor $L(F, d_t)$ medirá la pérdida sufrida si se elige la decisión d_t cuando el verdadero estado de la naturaleza es F. Para tomar una decisión con conocimiento de causa, el investigador puede experimentar, es decir, observar los valores de ciertas variables aleatorias. Una función de decisión indicará cómo conducir la experimentación y qué decisión terminal adoptar en función de esos resultados. Conducir la experimentación quiere decir indicar qué variables aleatorias hay que observar y, según los resultados de las observaciones, si es preciso continuar la experimentación y cómo –es decir, qué nuevas variables aleatorias observar– o tomar una decisión terminal y cuál[41]. A toda experimentación le será asignado un "coste"[42]. Pero, hasta ahora, sólo hemos definido las funciones de decisión no-aleato-

---

sample number" es una función que depende de la forma de la distribución y de los parámetros. Su toma en consideración es determinante para juzgar acerca del interés de un test secuencial. (Cf. **Wald** (A.): *S.A.*, 2.2.2. y 2.3.3.) Se encuentra que, en numerosos casos, la esperanza matemática de esta función es muy inferior al número de observaciones que serían necesarias si se utilizara el más potente de los tests no secuenciales correspondientes a los mismos umbrales de error. (*S.A., Intr.* p. 1 y § 2.4.2., pp. 35-36.)

[41] Precisemos algunos puntos secundarios:

1.º Ciertas funciones de decisión imponen una decisión terminal antes de toda experimentación. Su elección sería razonable si toda observación fuera más costosa que un error cualquiera en la decisión tomada.

2.º Se supone que no se puede efectuar más que una observación sobre una variable aleatoria determinada, pero las condiciones del problema autorizan la introducción de un número cualquiera de variables aleatorias independientes y de la misma ley de repartición. En cada estadio, la observación prescrita por una función de decisión no puede llevarse más que sobre variables que no han sido ya observadas.

3.º No se impone en absoluto que una sola variable sea observada en cada etapa. En efecto, en los problemas prácticos, puede ser útil agrupar las observaciones por razón de economía. Esto lleva a complicar el formalismo, pero la teoría construida tendrá un campo de aplicación muy vasto.

[42] Generalmente, el coste depende esencialmente del número de variables observadas. Pero puede depender de su "naturaleza", del orden de las observaciones e incluso de su modo de agrupamiento.

rias. Ahora bien, será necesario introducir ulteriormente funciones llamadas aleatorias cuya definición es mucho más compleja: Se supone que, en cada etapa de la experimentación –incluso en la que precede a toda experimentación– se tira a suertes con probabilidades determinadas entre las funciones de decisión no-aleatorias compatibles con la situación en la cual uno se encuentra (es decir, se excluyen aquéllas que impondrían que se hubiera tomado una decisión terminal en una etapa anterior) y se conformará su conducción a la función de decisión que la suerte haya designado. Naturalmente, las funciones de decisión no-aleatorias son funciones de decisión aleatorias de un tipo particular (a saber, las que asignan una probabilidad siempre igual a 1 a una función particular). Tal es el sentido de las definiciones matemáticamente muy complejas que propone **Wald**[43].

Poco importa para nuestro propósito el aspecto técnico del problema; las ideas directrices son simples y se ve la flexibilidad de la formulación mantenida. Todo el problema es, nosotros lo dudamos, escoger la "mejor" función de decisión y, por tanto, dar primero un contenido a la idea de mejor función de decisión.

Supongamos conocido el estado de naturaleza F, lo que naturalmente no ocurre. Consideremos, en el conjunto de las funciones de decisión D, una función particular d. Incluso si se trata de una función no-aleatoria, no se puede determinar, excepto en los casos triviales[44], qué decisión terminal se tomará ni qué curso seguirá la experimentación. En consecuencia, no puede definirse ni la pérdida sufrida en razón de la decisión adoptada, ni el coste de la experimentación, ni la suma de esas dos cantidades, que llamaremos simplemente pérdida en lo que sigue. Pero al menos es posible calcular la probabilidad de que se tome tal decisión terminal después de tal tipo de experimentación. Así se puede calcular la probabilidad de que la pérdida tenga un valor definido. Bajo ciertas condiciones, de las que no nos preocuparemos y que suponemos siempre satisfechas[45], se puede asignar, a toda pareja formada por un estado de la naturaleza F y por una función de decisión d, aleatoria o no, un número real que es la esperanza matemática de la pérdida sufrida si se elige d cuando el verdadero estado de la naturaleza es F. Se lo designa por $r(F, d)$ y se le llama el riesgo unido a la elección de d si F es verdadero. El problema de la decisión estadística sólo tiene sentido si se cumplen las condiciones siguientes: que se pueda definir el conjunto Ω de los estados de la naturaleza, un conjunto D_t llamado conjunto de las decisiones terminales y un conjunto D de funciones de decisiones relativas a Ω y a D_t. D podrá ser el conjunto de las funciones de decisiones posibles, una vez fijados Ω y D_t, o una parte propia de este conjunto. Se supone siempre que, para toda pareja $\langle F, d\rangle$ del conjunto-producto ΩXD, está definida una función numérica

---

[43] *S.D.F.*, § 1.1.3. y 1.1.4., pp. 4-8.

[44] Son los casos siguientes:

1.º F no contiene más que variables aleatorias degeneradas.

2.º d impone una decisión antes de toda experimentación o después de la observación de un conjunto de variables todas ellas degeneradas.

[45] Esas condiciones atañen a la convergencia de ciertas integrales.

llamada función de riesgo: $r(F, d)$ designa la pérdida sufrida si se elige d como función de decisión en tanto que el estado de la naturaleza es F.

Antes de ir más lejos y de mostrar qué propiedades pueden determinar la elección de d en razón de las propiedades de la función $r(F, d)$ importa probar, como hace **Wald**[46], que el problema planteado incluye las cuestiones tradicionales de la teoría de la inferencia estadística, a título de casos particulares. Consideremos los problemas del test de hipótesis. La hipótesis a contrastar se expresa bajo la forma $F \in \omega$, siendo ω una parte propia del conjunto de los estados de la naturaleza. El curso de la experimentación se fija de antemano y el conjunto de las decisiones terminales se reduce a dos elementos, d_t^1 y d_t^2: aceptar la hipótesis o rechazarla. Nos ceñiremos pues a un conjunto D de funciones de decisión que satisfacen esas condiciones[47]. Dado que todas las funciones de decisión imponen un mismo curso a la experimentación, se desdeñará el coste de la experimentación[48]. Pero, admitidas esas hipótesis –para que el problema del test de las hipótesis tenga sentido cuando se lo trata como un problema de decisión, es preciso todavía que se defina una función de pérdida sobre el conjunto $\Omega X D_t$. Es natural introducir la función siguiente– denominada función simple: la pérdida es nula si no se comete ningún error; dicho de otra forma, si $r(F, d_t^1) = 0$ si $F \in \omega$ y $r(F, d_t^2 = 0$ si $F \notin \omega$, e igual a 1 en el caso contrario. La elección de esta función vuelve a otorgar una misma importancia a todos los errores, sea cual sea su tipo; es claro que se podría hacer otra elección. A todo test corresponde entonces una función de decisión a la que se asigna un riesgo así definido: si la hipótesis es verdadera, el riesgo es igual a la extensión del test, si no a (1 – su potencia).

Todos los conceptos de la teoría de los tests de hipótesis encontrarían entonces su lugar en la teoría de **Wald**. Ocurre lo mismo en lo que atañe al problema de la estimación. Supongamos, para simplificar, un parámetro único. En ese caso, los estados de la naturaleza están constituidos por procesos estocásticos compuestos de variables aleatorias independientes de la misma ley de repartición, perteneciendo esta ley de repartición a una familia definida que depende del parámetro único θ que hay que estimar. Aquí nos ceñimos también a conjuntos de funciones de decisión no-aleatorias y que imponen el mismo curso a la experimentación. En el problema de la estimación por medio de un punto, el conjunto de las decisiones terminales es isomorfo con el conjunto de las estimaciones posibles de θ, es decir, con el conjunto de los valores posibles de ese parámetro. En el caso de la estimación por intervalo, es isomorfo con un conjunto de parejas de valores de θ. ¿Se quiere, por ejemplo,

---

[46] *S.D.F.*, 1.5.1. y 1.5.2., pp. 18-24.

[47] Nos ceñimos a las funciones que imponen observar globalmente un conjunto de variables y tomar luego una de las dos decisiones posibles.

[48] Las hipótesis explícitas que justificarían este paso son las siguientes:

1.º El coste de la experimentación depende únicamente del número de las variables observadas. Es independiente de su orden, de su modo de agrupamiento, de los valores observados.

2.º El coste de la experimentación es, pues, el mismo para todas las funciones de decisión a las que nos limitemos en este caso.

que nos limitemos a las estimaciones no sesgadas? Esto significa que es preciso restringir aún más el conjunto de las funciones de decisión, reteniendo sólo aquéllas que dan, a la decisión terminal θ^*, una esperanza igual a θ, sea cual sea θ. En cuanto a la elección de estadísticos eficientes –es decir, tales que la varianza $(\theta^* - \theta)^2$ sea de esperanza mínima, ésta se impone desde el momento en que se estima como $(\theta^* - \theta)^2$ la pérdida sufrida cuando se elige la estimación θ^* en tanto que el verdadero valor del parámetro es θ. En efecto, $E(\theta^* - \theta)^2$ mide entonces el "riesgo" ligado a la elección de la decisión θ^* cuando θ es verdadero. Pero es claro que otras medidas de la pérdida serían igualmente razonables. Así ocurre que, al sobredeterminar el problema general de la decisión, se pueden recobrar las cuestiones tradicionales y ellas reciben naturalmente soluciones parecidas a las que se mantenían en las teorías clásicas.

La cuestión general de la decisión estadística es, por tanto, la de la elección de una función de decisión en un conjunto determinado. Algunas advertencias elementales pueden guiar esa elección.

Sean dos funciones de decisión d y d'. Supongamos que para todo F de Ω se tenga $r(F, d) \leqslant r(F, d')$, siendo válida la desigualdad estricta para, al menos, un elemento de Ω. Ninguna circunstancia puede legitimar que se prefiera d' a d; al contrario, hay casos en que la elección de d será ventajosa. Se dirá que, en un caso tal, d es *uniformemente mejor que* d'. Se preferirá siempre una función tal que haya otra uniformemente mejor que ella. Llamaremos *admisible* a una función que no está en ese caso. Sea C una parte del conjunto de las funciones de decisión. Si para todo elemento d de D, se puede encontrar en C un elemento d' tal que d' sea uniformemente mejor que d, se dirá que C constituye una clase *completa* de funciones. Es evidente que se puede restringir el problema de la elección de una función de decisión a una clase completa de D, clase que necesariamente comprende todas las funciones admisibles[49].

Además, se obtienen ventajas restringiendo tanto como sea posible la clase completa elegida. Si una clase completa no tiene parte propia que sea completa, se dice que es *minimal.* Se muestra fácilmente que no puede existir más que una clase completa minimal que es la clase de las funciones admisibles[50]; pero puede ocurrir que la clase de las funciones admisibles no sea completa[51]. De todas formas la determi-

[49] En efecto, si la clase completa C no contuviera la función admisible d, debería contener una función d' uniformemente mejor que d y d no sería admisible.

[50] La relación "ser uniformemente mejor que" es naturalmente un orden parcial. Las funciones admisibles son los elementos minimales según ese orden. Está claro que una clase completa C debe contener todos los elementos minimales. Supongamos, además, que C contiene un elemento d, que no es minimal. Existe pues d', con $d' < d$ y la completud de C permite concluir que hay d'' (con $d'' \in C$) y $d'' < d'$. Se tiene pues $d'' < d$ y $C - \{d\}$ sería una clase completa. Si C es una clase completa minimal no puede comprender por tanto más que funciones admisibles.

[51] De hecho, las condiciones de completud de la clase de las funciones admisibles son muy débiles (Cf. **Wald** (A.): *S.D.F.*, § 1.3., p. 15, § 2.22, p. 54 y § 2.26, p. 56 y **Blackwell** (D.) y **Girshick** (M.A.): *G.S.D;*, § 5-6 y 5-7, pp. 139-142.)

nación de una clase completa sólo resuelve imperfectamente el problema de la decisión pues ¿qué función de esta clase elegiremos si hay varias, lo que es el caso común?

Si se dispusiera de una distribución de probabilidades *a priori* sobre el conjunto de los estados de la naturaleza, sería legítimo definir una esperanza de riesgo[52] para toda función de decisión y elegir una función que minimice esta esperanza. Se obtendría así una solución *bayesiana* del problema de la decisión. Sin embargo, en la mayor parte de los casos, no se pueden determinar probabilidades *a priori*. Por eso es preciso recurrir a soluciones de otro tipo. El *formalismo* de la teoría de juegos se introduce, aquí, en la teoría de la decisión.

En el sentido de von **Neumann**, un juego de forma normal es una función numérica f limitada y definida sobre el producto cartesiano de dos conjuntos AXB (en rigor, un juego es un triplete $\langle A, B, f\rangle$). Se llamará A al conjunto de las estrategias puras del jugador 1, B, al conjunto de las estrategias puras del jugador 2; los intereses de los dos jugadores son opuestos en el sentido de uno gana lo que el otro pierde. Cada jugador elige su actuación en un conjunto bien definido: el conjunto de sus estrategias. Hace su elección ignorando la elección hecha por su adversario. Supongamos que 1 elija a; 2, b; la pérdida de 1 –que es la ganancia de 2– viene dada por el valor de la función f, llamada balance del juego, para la pareja $\langle a, b\rangle$, es decir, que es igual a $f(a, b)$. ¿Qué principio de elección aconsejaremos al jugador? Tal es el problema de von **Neumann.**

Supongamos que 1 escoja la estrategia a_0; ignora la elección de su adversario, del que sabe simplemente que se afana en hacerle perder. En las peores circunstancias, él puede perder $\sup_{b\in B} f(a_0, b)$. Si sólo escucha los consejos de la prudencia, 1 se verá llevado a escoger su estrategia de tal manera que esa cantidad se minimice. Así está seguro de limitar su pérdida a $\inf_{a\in A} (\sup_{b\in B} f(a, b))$. Del mismo modo, 2 podrá elegir una estrategia de tal manera que se maximice la ganancia mínima que garantiza. Puede asegurarse de ganar al mínimo $\sup_{b\in B} (\inf_{a\in A} f(a, b))$. Esas dos cantidades, a propósito de las cuales se demuestra fácilmente que la primera no es más pequeña que la segunda, se llaman respectivamente valores superior e inferior del juego. Es posible[53] que coincidan. En ese caso, se dice que el juego tiene un valor puro.

Supongamos que se definen, sobre A y B, distribuciones de probabilidades ξ y

---

[52] En rigor, se probabiliza un álgebra σ de partes de Ω, que contiene todas las partes enumerables de Ω. La esperanza de riesgo para la función d y la distribución de probabilidad ξ será $\int_\Omega r(F, d)\, d\xi = r^*(\xi, d)$ (con $\int_\Omega d\omega = 1$).

[53] Si A y B son finitos, los valores de f pueden ser presentados bajo la forma de un cuadro rectangular, llamado matriz del juego. El juego tendrá un valor puro si hay en la matriz un punto de equilibrio, es decir, un término que es a la vez el más grande en su columna y el más pequeño en su línea.

η[54]. Estas distribuciones se denominan estrategias mixtas. Adoptar una estrategia mixta es elegir, por medio de un mecanismo aleatorio, entre las estrategias puras según probabilidades que dependen de la estrategia mixta mantenida. Las estrategias puras son, naturalmente, "casos particulares" de estrategia mixta. A cada pareja de estrategias mixtas $\langle \xi, \eta \rangle$ se le puede asignar una magnitud que representa la esperanza de pérdida de 1 si 1 elige ξ y 2, η: $f^*(\xi, \eta) = \int_A \int_B f(a, b)\, d\xi\, d\eta$. Si A^* y B^* designan respectivamente los conjuntos de distribuciones de probabilidades sobre A y B, $\langle A^*, B^*, f^* \rangle$ define un juego que se llama la extensión mixta de $\langle A, B, f \rangle$. Von **Neumann** demuestra entonces que, si A y B son finitas, la extensión mixta de todo juego sobre AXB tiene un valor puro. Dicho de otro modo, existen ξ_0 y η_0 tales que

$$\inf_{\xi \in A^*} [\sup_{\eta \in B^*} f^*(\xi, \eta)] = f^*(\xi_0, \eta_0) = \sup_{\eta \in B^*} [\inf_{\xi \in A^*} f^*(\xi, \eta)]$$

Esas estrategias se llaman *soluciones minimax* del juego. Adoptarlas supone asegurar que se reduce al mínimo la esperanza de pérdida, suponiendo que el adversario adopta siempre la actitud más desfavorable.

Se impone la analogía del problema de la decisión con el formalismo. Se define igualmente una función de pérdida sobre el producto cartesiano de dos conjuntos ΩXD. A las estrategias puras corresponde, por una parte, la determinación de un estado de la naturaleza y, por otra, la elección de una función de decisión; a las estrategias mixtas, la elección de una función de distribución sobre esos conjuntos[55]. Ciertos conceptos de la teoría de la decisión estadística no son sino la traducción de los conceptos de la teoría de juegos: las funciones admisibles corresponden, por ejemplo, a las estrategias admisibles de la teoría de juegos; en las dos teorías se habla de clases completas, etc... En ausencia de todo conocimiento concerniente a la probabilidad *a priori* de los diversos estados de la naturaleza, ¿no se podría recurir a las soluciones minimax para resolver el problema de la decisión?

En realidad, para que ese recurso sea posible, sería preciso resolver primero ciertos problemas puramente matemáticos. La existencia de un valor puro la establecía von **Neumann** sólo en casos restringidos (finitud de A y B). Se necesitaban resultados más fuertes. A este fin responde lo esencial de la obra de **Wald**: introduciendo una métrica sobre el conjunto de las funciones de decisión[56], se puede establecer,

---

[54] En rigor, esas distribuciones se definen sobre álgebras σ de partes de A y de B.

[55] Pero, se preguntará, ¿no son ya aleatorias las estrategias? Sí, y se podría restringir el conjunto de las estrategias puras a un conjunto de funciones de decisiones no-aleatorias. **Wald** procede de otra forma por razones que dependen de la pura técnica matemática. (*S.D.F.*, § 1.6.3., página 27).

[56] Por ejemplo, se define la distancia de dos estrategias a_1 y a_2 del conjunto A por:

$$\delta(a_1, a_2) = \sup_{b \in B} |f(a_1, b) - f(a_2, b)|.$$

Se demuestra que se trata efectivamente de una distancia en el sentido de la teoría de los espacios métricos.

en numerosos casos, la existencia de un valor en el sentido de von **Neumann**[57], al precio de hipótesis más bien débiles que vuelven a afirmar que ciertos espacios tienen propiedades topológicas determinadas, o se puede mostrar la completud de ciertas clases destacables de funciones de decisión[58]. Por otra parte, se estudian sistemáticamente los casos particulares que interesan en las aplicaciones prácticas o que permiten volver a encontrar los problemas tradicionales de la teoría de la inferencia estadística: procesos aleatorios compuestos de variables independientes y de las mismas leyes de repartición (como en los problemas de estimación), función del coste de la experimentación que no depende más que del número de observaciones, conjunto de las decisiones terminales reducido a dos elementos (como en los test de hipótesis), juegos truncados (es decir, tales que esté fijada una cota superior del número de observaciones). Parece que los resultados conseguidos por la teoría clásica pueden ser recobrados en la teoría de **Wald.**

Pero subsiste una dificultad que comporta el riesgo de obstaculizar la adquisición de resultados nuevos; concierne a la legitimidad de la traslación del concepto de juego a una teoría de la inferencia estadística. Precisemos la situación: Von **Neumann** ha creado una teoría formal con sus conceptos, su problemática, sus resultados. Se considera que esta teoría encuentra una aplicación en los juegos, en el sentido estricto del término (o, al menos, en ciertos juegos), y en ciertas situaciones de concurrencia que dependen de los fenómenos económicos. Además, lo esencial de los trabajos en teoría de juegos consistía en adaptar mejor el instrumento formal a la realidad de las situaciones de este último tipo (por ejemplo, estudiando los juegos en que la suma de las ganancias no es nula, en que hay más de dos jugadores y posibilidad de coaliciones). Ahora bien, se encuentra que este formalismo halla una nueva aplicación en la teoría de la decisión. De ahí la posibilidad de transferir conceptos, métodos y resultados. Pero falta por saber si esa transferencia es útil, si ciertos conceptos fundamentales no pierden su significación o interés cuando se les somete a esta transposición. Tal es el caso, ante todo, del concepto de solución minimax.

Es, quizás, razonable concebir la elección de una decisión por parte del estadístico como semejante a la elección de una estrategia por parte de un jugador y decir que el estadístico juega contra la Naturaleza. ¿Pero juega la Naturaleza contra él? ¿Qué significa el concepto de estrategia cuando se le aplica a la elección que hace "la Naturaleza" del estado que es el suyo? ¿Qué interés tiene, pues, en hacer perder al estadístico, es decir, en disfrazarse? Es claro que, aplicado a tales situaciones el

---

[57] Es el caso de si, por ejemplo, la función de pérdida está limitada y D es compacta para la distancia

$$\delta(d_1^t, d_2^t) = \sup_{F \in \Omega} |W(F, d_1^t) - W(F, d_2^t)|$$

(*S.D.F.*, § 3.1.2., p. 62).

[58] Cf. en *S.D.F.*, los teoremas 3.4, p. 88 y 3.17, p. 100.

concepto de estrategia induce significaciones absurdas. Por eso, no es introducido en la teoría de la decisión[59] sin escrúpulo ni sin restricciones. Una doctrina que se presenta como "una teoría del comportamiento racional en una situación desconocida, en la que el factor desconocido es la elección de una estrategia por parte de un adversario inteligente cuyos intereses son diametralmente opuestos a los nuestros"[60], difícilmente puede brindarse como una teoría del comportamiento racional en una situación en que lo desconocido es el estado de una naturaleza a la que no se puede atribuir malevolencia alguna. Por eso, el interés de las soluciones minimax sólo puede ser defendido mediante razones bastante débiles. Mantenerlas es considerar que es razonable, ante la falta de certeza, hacer como si las circunstancias fueran tan desfavorables como puedan ser. Se comprende que se haya podido decir que determinan una elección que en ciertos casos "parecería irracional a todos, excepto a los más incurables pesimistas"[61].

¿Está prohibido considerar la inferencia estadística como un juego contra la Naturaleza? Sí, si se entiende por ello que es preciso dar una significación intuitiva a todos los conceptos de la teoría de juegos; no, si se entiende simplemente señalar ciertas analogías estrictamente formales entre problemas de juegos y cuestiones estadísticas. Pero, en esas condiciones, ¿no está abocada al fracaso la teoría de **Wald**? Sin duda alguna, el recurso a soluciones minimax es un principio que carece de racionalidad y la necesidad de un recurso semejante impide, en numerosos casos, estimar la teoría de **Wald** como perfectamente satisfactoria[62]. Pero se puede evitar en otros casos y recobrar todos los resultados de las teorías clásicas, cuando se especifica suficientemente el problema de la decisión. Además, la teoría de **Wald** tiene la ventaja de integrar, en una conceptualización y una problemática unificadas, desarrollos que eran demasiado dispares. Por último, se adapta mejor que las teorías clásicas a la solución de ciertos problemas concretos. Hay situaciones en las que las nociones del coste de la experimentación, de pérdida vinculada a una decisión errónea, tienen un sentido manifiesto y en las que la aplicación del método de **Wald** se revela perfectamente eficaz. Poco importa saber si no hace más que transcribir en un lenguaje nuevo resultados ya conocidos o si aporta resultados nuevos teóricamente importantes, acerca de los cuales no tenemos competencia alguna para juzgar. Nos era preciso, simplemente, mostrar que, sean cuales sean las dificultades vinculadas al uso de algunos de sus conceptos, se presenta como el término natural de las investigaciones estadísticas emprendidas desde hace cuarenta años.

Pero un problema se mantiene: Esta doctrina de la inferencia estadística, que ha

---

[59] Cf. **Wald** (A.): *S.D.F.*, 1.6.3., p. 27.

[60] Cf. **Blackwell** (D.) y **Girshick** (M.A.): *G.S.D.*, 4.1, p. 102. Los mismos autores observan que la imposibilidad de identificar a la naturaleza con un adversario inteligente "suscita el problema importante y todavía no resuelto de saber lo que es una manera racional de jugar juegos de este tipo". (*Ibid.*, 3.1., p. 75.)

[61] **Blackwell** (D.) y **Girshick** (M.A.): *G.S.D.*, 4.3., p. 113. B. **Matalon** retoma el mismo argumento. (*E.P.*, pp. 548-549.)

[62] Es lo que afirma B. **Matalon:** *E.P.*, p. 549.

culminado en una conceptualización tan refinada, ¿enseña algo al epistemólogo que trata de resolver los problemas de la inducción?

3. La inferencia estadística y la lógica de la inducción

Nos era necesario dar una imagen suficientemente precisa de las teorías estadísticas para que se pueda juzgar sobre su pertinencia en una teoría formal de la inducción. Si se llama inducción a todo paso de lo particular a lo general, a todo conocimiento que concierne a aquéllo acerca de lo cual no tenemos certeza, se está en perfecto derecho de estimar la inferencia estadística como una teoría de la inducción. Pero es preciso constatar que, sea cual sea la forma que adopte, atañe a la inducción secundaria y no a la inducción primaria. Aquí no se logra ninguna conclusión sin que se suponga la certeza de ciertas leyes universales, la verdad de asunciones siempre muy fuertes. Se estima un parámetro, pero suponiendo conocida la familia paramétrica a la que corresponden ciertas leyes de repartición. Se contrasta una hipótesis, pero se admite de antemano que una familia determinada constituye una familia completa. Se determina una estrategia óptima, pero después de haber delimitado el conjunto de los estados de la naturaleza y el conjunto de las decisiones terminales y después de haber definido una función de pérdida sobre su producto. Admirablemente adaptada a ciertos problemas concretos, incluso a ciertos procedimientos que juegan un papel en la investigación experimental, la teoría de la inferencia estadística parte de una situación en la que está cerrado el campo de lo posible y sus resultados sólo son válidos a ese precio.

Si bien es rigurosamente indispensable desde el momento en que se aborda el dominio de lo aleatorio, no enseña nada de esencial al epistemólogo que trata de resolver el problema de la inducción. ¿Qué prueba su existencia? Nada, si no es que, admitidas ciertas hipótesis –que tienen el estatuto de leyes científicas obtenidas por inducción–, hay esquemas de razonamiento que permiten concluir la verdad o la probabilidad de otras hipótesis. Pero ése es un hecho que nadie ha negado jamás y que no basta para resolver los problemas de la inducción. Si no es porque se sustituyen las leyes deterministas por procesos estocásticos y la verdad por una simple probabilidad, nos encontramos exactamente en la situación de los esquemas de experiencias cruciales. Estando determinada una familia completa de hipótesis que difieren por pareja en al menos una consecuencia verificable, se sabe que se las puede eliminar a todas eventualmente, salvo a una, que será por tanto cierta. Es posible que baste aquí un número finito de experiencias, ya porque la familia sea finita, ya porque ciertas observaciones rechacen en bloque una infinidad de hipótesis. Se sabe a qué juiciosa crítica ha sometido **Duhem** no este tipo de razonamiento, sino la conclusión que ciertos pensadores pretendían extraer de su existencia, a saber, que existían casos en los que se podía conferir certeza a las leyes obtenidas por inducción[63].

[63] *T.P.*, cap. IV, § 3, pp. 285-289. **Duhem** se limita al caso de las familias de hipótesis com-

Esta crítica consiste simplemente en llamar la atención sobre la premisa del razonamiento: la completud de una familia de hipótesis; y en señalar que está obtenida por inducción y no puede ser estimada como cierta, a menos que se haga de ella el resultado de un razonamiento anterior del mismo tipo, en cuyo caso nos comprometemos en una regresión hasta el infinito. Inútil decir que el mismo tipo de argumentación se aplica al caso que nos atañe.

En estas condiciones, ¿de dónde viene la creencia ilusoria en la posibilidad de erigir a la doctrina de la inferencia estadística en teoría general de la inducción? Depende ante todo del hecho de que, a menudo, las premisas admitidas son hipótesis bien establecidas, cuya validez es objeto de consenso por parte de los hombres de ciencia, mientras que no ocurre lo mismo con las conclusiones antes de que la inferencia estadística las haya garantizado. Pero eso es olvidar que, si se trata de la epistemología de la inducción, no nos podríamos contentar con el hecho de que una ley es reconocida como válida por los especialistas. También sería preciso analizar las razones que les impulsan a tenerla por válida. Pero una segunda razón viene a confirmar en este error: es difícil definir con todo rigor las hipótesis mínimas necesarias para obtener conclusiones dignas de interés. El progreso de las teorías formales consiste precisamente en establecer las mismas conclusiones a partir de hipótesis más débiles. De ahí la idea, obtenida por un ilegítimo paso al límite, de que se podrá quizás un día concluir en ausencia de toda hipótesis y que entonces la teoría de la inferencia estadística se presentará como una teoría de la inducción primaria. Así es como **Fisher** invoca, en un texto rico en supuestos, la posibilidad de construir una teoría que permitiría concluir en condiciones mucho más generales, o más exactamente, que permitiría estimar las hipótesis formuladas: "Es claro que no puede haber en ella ninguna operación denominada propiamente "estimación" hasta que se hayan definido los parámetros a estimar y esto requiere que se dé la forma matemática de la distribución. Sin embargo, no debemos cerrar los ojos a la posibilidad de que un tipo todavía más amplio de argumento inductivo sea desarrollado algún día, argumento que discutiría los métodos para asignar la forma funcional de la población a partir de los datos. Por el momento, únicamente es importante señalar que no se ha construído ninguna teoría de ese tipo"[64].

Nos interesa mostrar, por tanto, que la teoría de la inferencia estadística es de poca ayuda para quien quiere construir una teoría formal de la inducción. En particular, desde el momento en que se trate de determinar la probabilidad de una ley no probabilitaria, es inaplicable. Además, algunos de sus conceptos no tienen sentido más que si se presupone una solución del problema de la inducción, mientras que otros pierden toda significación cuando se los traslada fuera del campo limitado en

---

puestas de dos elementos como impone el sentido corriente del concepto de experiencia crucial. Pero una ampliación del sentido de ese concepto no crea ninguna dificultad. Por eso lo tomamos en un sentido más amplio.

[64] *U.I.*, p. 250.

el que tenemos costumbre de verlos funcionar. Esto es lo que vamos a establecer con la ayuda de algunos ejemplos.

Se podría pensar en utilizar los esquemas bayesianos para calcular la probabilidad que conviene atribuir a una hipótesis que no tenga la forma de una ley probabilitaria cuando ciertos hechos están establecidos por la experiencia. Es lo que hizo **Laplace**, quien creyó encontrar en el cálculo de probabilidades un medio de recoger el desafío de **Hume**. **Laplace** toma el ejemplo humeano de la ley: "El sol saldrá todas las mañanas". Precisemos los datos del problema a fin de conferir más rigor a su argumentación: la ley cuya probabilidad hay que estimar es de la forma $(x)(Ax \supset Bx)$, siendo A y B predicados monádicos de observación. La cuestión es saber cuál es la probabilidad de esta ley, suponiendo como datos un cierto número de ejemplos que la confirman[65].

Planteado así el problema, el razonamiento de **Laplace** es el siguiente. Se puede considerar la posesión del atributo B por un objeto que es un A como un suceso aleatorio. Se supone que los sucesos "a_1 que es un A es también un B", "a_2 que es un A es también un B", etc. son independientes y de la misma probabilidad igual a p. En suma, se asimila la confirmación de la ley por una serie de ejemplos a una serie de resultados de sorteos en un bombo cuya composición es constante. El problema es, simplemente, determinar la composición del bombo. Supongamos la ley como verificada n veces. Determinar su probabilidad se convierte en calcular la probabilidad de que $p = 1$, cuando se sabe que un suceso de probabilidad constante p se ha producido n veces en una serie de n pruebas. El problema se resuelve con la introducción de una ley *a priori* de distribución p. En virtud del principio de indiferencia, se supone a p equirrepartida[66]. Se concluye de ahí que la probabilidad de la ley $(x)(Ax \supset Bx)$ es nula sea cual sea el número de ejemplos que la confirman, a reserva de que ese número sea finito[67]. Es verdad que, si se pide simplemente la probabilidad de que la ley se verifique siempre en una nueva serie de m pruebas, se encuentra una conclusión más razonable ya que esa probabilidad es igual a $\frac{n+1}{n+m+1}$. El caso en que $m = 1$ –siendo la probabilidad igual a $n + 1/n + 2$– ha recibido el nombre de "regla de sucesión de **Laplace**".

Ese tipo de argumentación puede ser sometido a dos tipos de críticas. Se puede, ante todo, discutir el empleo de un esquema bayesiano, la introducción de probabi-

---

[65] Se excluye, como hace **Laplace**, toda otra razón que podría hacer variar esta probabilidad, por ejemplo, se excluye el hecho de que la ley se inserte en un sistema teórico que recibe, además, otras confirmaciones. Tendremos que interrogarnos sobre la legitimidad del procedimiento que consiste en tratar casos tan esquemáticos. Pero, sea cual sea, se debe señalar que la probabilidad obtenida no tendrá más que una significación epistemológica muy pobre.

[66] Cf. § 1.

[67] Se podría evitar ese resultado confiriendo a la probabilidad *a priori* de que p sea igual a 1 un valor no nulo. Se procedería lo mismo con $p = 0$. Pero, ¿qué valores eligiremos y cómo repartiremos la "probabilidad restante" sobre los otros valores?

lidades *a priori* y un uso del principio de indiferencia del cual hemos visto cuán frágil era en casos semejantes. Esta crítica, muy común[68], es del todo pertinente, pero no va al meollo de la dificultad. Lo que debe ponerse en cuestión es el derecho a reducir el problema a la determinación de una probabilidad desconocida, pero constante. En efecto, supongamos legítima la introducción de probabilidades *a priori*. Se mantiene entonces una hipótesis: La posesión de A da, a la posesión de B, una probabilidad determinada. Dicho de otro modo, en el razonamiento de **Laplace** se presupone que existe entre los predicados A y B una implicación probable, en el sentido que **Reichenbach** dará a ese término. El razonamiento sólo tiene sentido si se admite que una de las leyes de la forma "Si x es un A, hay una probabilidad p de que x sea un B" es verdadera. Pero ¿en qué condiciones puede aceptarse una asunción semejante?

Es obvio que interesa tomar en consideración la significación concreta de los predicados y que la delimitación de un conjunto de propiedades proyectables se impone en este caso, como se imponía en el caso de la inducción por enumeración simple. Sería fácil volver a encontrar la paradoja de **Goodman** aplicada a la regla de sucesión de **Laplace**[69]. Además, si la posesión de propiedades distintas de A juega un papel en la posesión de la propiedad B, todo el razonamiento de **Laplace** se desmorona. Sólo vale en la medida en que A sea el único carácter relevante en lo que concierne a la propiedad B. En suma, el razonamiento no puede llevar a una conclusión, a no ser que se satisfagan las dos condiciones siguientes: 1° A determina a B (en probabilidad, al menos). 2° A es el único factor que determina a B. Es claro que tales hipótesis no pueden estar fundadas más que por una inducción previa, que no es más segura que aquélla cuya probabilidad se pretende calcular.

Se observará el paralelismo de la situación con aquélla en la que nos encontramos cuando tratamos de aplicar los esquemas de **Mill**. Si estos últimos podían ser estimados como una respuesta al desafío humeano, ocurriría lo mismo con el razonamien-

[68] **Boole** es el autor de la primera crítica sistemática de la regla de **Laplace.** Intenta mostrar lo arbitrario de la solución de esos problemas donde se pretende enmascarar la ausencia de datos suficientes con la apelación al principio de indiferencia. Existen otras hipótesis distintas a las de **Laplace** que pueden ser justificadas por el principio de "la equidistribución del conocimiento o de la ignorancia". Así, al suponer que el problema de la determinación de la probabilidad de la salida del sol es asimilable a una extracción de un bombo cuyas *constituciones* son equiprobables todas, **Boole** concluye que, después de n salidas del sol, la probabilidad de que el sol salga mañana es 1/2. Se ve que lo que constituye el objeto de su crítica es la aplicación del principio de indiferencia. (Cf. *I.L.T.*, cap. 20, § 23-26, pp. 368-375.)

[69] Proponemos la derivación siguiente: B' denota la propiedad "ser un B y observado antes del instante t (siendo t el instante de la última observación efectuada) o ser un $\sim B$ y observado después del instante t". Al aplicar la regla de sucesión sucesivamente a las parejas de predicados A y B y A y B', se halla que la probabilidad de que el próximo objeto que es un A sea un B es $\frac{n+1}{n+2}$ si se han observado nA que son todos B. Pero la probabilidad de que sea un B', es decir, un $\sim B$, es la misma. Ahora bien, la suma de esas dos probabilidades debería ser igual a 1, lo que no ocurre, excepto en el caso de que $n = 0$.

to de **Laplace** y recíprocamente. Pero, en esta materia, la introducción de consideraciones probabilitarias no hace avanzar un paso la solución de la cuestión. Es preciso hacer notar el alcance de la objeción que acabamos de presentar; no atañe únicamente al razonamiento de **Laplace** sino a toda tentativa de aplicar la inferencia estadística a la solución del problema de la inducción, en la medida en que esta aplicación supondría el uso del concepto de *muestra aleatoria* (random sample).

¿Qué es una muestra aleatoria? Es difícil dar una respuesta a esta cuestión y precisar el estatuto de este concepto. Hablando formalmente, una muestra aleatoria podría definirse como una serie finita de variables aleatorias independientes y de la misma ley de repartición. Sería necesario añadir que esta ley de repartición debe dar una "imagen" de la distribución de ciertos caracteres en la población. Tenemos un ejemplo que aclara el sentido de este requisito: dada la población de los electores franceses, la distribución de las intenciones de voto está determinada por un cierto número de parámetros (las proporciones de electores dispuestos a votar por tal partido); la distribución de sus tallas, sea por los parámetros que determinan la curva representativa de esas tallas, curva de la que se dará la forma funcional, sea por parámetros que indican la proporción de individuos que tienen una talla inferior a x. Una muestra extraída de esta población se llamará aleatoria para la distribución de las intenciones de voto, si la probabilidad de que un individuo de la muestra vote por un partido determinado es igual a la proporción de electores que están en las mismas disposiciones; aleatoria para las tallas, si la probabilidad de que un individuo de la muestra tenga una talla determinada es una variable aleatoria cuya densidad está dada por la curva representativa de las tallas en la población. Notemos que una muestra puede ser aleatoria para un carácter determinado y no para otro. Ahora bien, la mayor parte de las aplicaciones de la estadística suponen que se está en perfecto derecho de estimar tal muestra concreta como aleatoria. Pero, ¿qué es lo que justifica una creencia semejante?

Es claro que consideraciones concernientes al modo de obtención de la muestra son determinantes. Es preciso estar seguro de que no se hace intervenir un factor pertinente al utilizar tal procedimiento de extracción. Se responderá que existen procedimientos para confirmar esta hipótesis y que constituyen los rudimentos de las técnicas de sondeo. Esta respuesta es de poco valor. Lo que se confirma por medio de esos métodos probados es la irrelevancia de ciertos factores determinados. Evitando factores de los que se tiene alguna razón para temer que sesgan la muestra, se asegura su carácter aleatorio. Pero todos esos procedimientos dependen de una hipótesis, a saber: que no se ha omitido ningún factor relevante en la enumeración, y es aquí donde debe intervenir un conocimiento previo, que es raro que se adquiera por las vías de la inferencia estadística. Por fecundas que sean en investigación experimental, no pueden pues contribuir a resolver los problemas fundamentales de la inducción. Encontramos en este ejemplo los mismos límites que habíamos encontrado cuando se trataba de aplicar el método de **Mill**.

Los métodos de la inferencia estadística no aportan, por tanto, en modo alguno,

una solución a los problemas de la inducción. Pero hay más; los conceptos más ricos de esta disciplina son los que pierden toda significación cuando se quiere integrarlos en una teoría formal de la inducción que sea apta para tratar los problemas fundamentales. Quisiéramos mostrarlo mediante el análisis de dos ejemplos, uno muy simple y el otro mucho más complejo.

El primer ejemplo es el del concepto de verosimilitud. Hemos visto cómo **Fisher** había propuesto medir el grado de creencia de una hipótesis no por su probabilidad, muy a menudo indeterminable sin recurrir a los esquemas bayesianos, sino por su verosimilitud. Pero ¿qué uso haremos de este concepto en una teoría de la inducción que tiene que tratar principalmente con leyes no probabilitarias? La respuesta es evidente: ninguno. En efecto, para las leyes no probabilitarias, toda ley que da cuenta de los datos experimentales tiene una verosimilitud igual a 1 y toda ley que no está en ese caso una verosimilitud nula. Esta simple observación basta para excluir que se funde una lógica de la inducción sobre el concepto de verosimilitud.

El segundo ejemplo es el del concepto de juego estadístico que aparece en la teoría de **Wald**. ¿Se puede reducir la inducción a un juego, y la investigación científica a una serie de decisiones del tipo de las que son estudiadas por **Wald**? A pesar de las advertencias de pensadores competentes que, a semejanza de **Fisher**, hacían notar la debilidad de la analogía, ciertos autores han respondido afirmativamente a esta cuestión[70]. Quisiéramos mostrar que tal respuesta es inaceptable y que la teoría de la decisión estadística no puede ser integrada en un análisis formal de la inducción. Silenciaremos naturalmente las dificultades que son propias de esta teoría, por ejemplo, la ausencia de racionalidad en la elección de soluciones minimax y no en el uso particular que se desea hacer de ellas.

¿Cómo especificar el problema de la decisión estadística para integrarlo en una teoría de la inducción? Ω representa el conjunto de los estados de la naturaleza. Es claro que, si no se limita este conjunto, los resultados obtenidos serán irrisorios. Es decir, la teoría de la decisión no estará en mejores condiciones que una doctrina de la inducción secundaria y cae bajo el golpe de las críticas que hemos formulado anteriormente. En cuanto al conjunto de las decisiones terminales, se interpreta aquí como el conjunto de las hipótesis que pueden ser mantenidas. Será isomorfa, si no con Ω, al menos con una partición de Ω. Pero las dificultades comienzan cuando se trata de definir el "coste de una experimentación". Lo más sencillo sería suponerlo nulo y, para evitar que la decisión no quede relegada siempre, limitarse a funciones de decisión truncadas, es decir, que imponen que se tome una decisión al

[70] Tal es el caso de I.D.J. **Bross** (*P.D.R.*) quien reduce la ciencia a ser "un simple método de tomar decisiones" (p. 12) y pretende que la teoría de la ciencia debe construirse en el marco de una doctrina de la decisión estadística y que no hay ninguna diferencia esencial entre el problema que plantea la aceptación de un lote de piezas después del control de una muestra y la aceptación de una hipótesis teórica después que haya recibido ciertas confirmaciones experimentales (p. 203). Nos referimos a este autor únicamente en tanto que es representativo de una mentalidad extendida entre los epígonos.

término de una serie de observaciones de longitud determinada. Además, hay que tratar problemas en que las leyes inducidas son de tipo determinista. ¿Se pueden tratar tales problemas en el marco de la teoría de **Wald**? Hablando formalmente, no está excluida en absoluto una posibilidad tal: se considerarán procesos aleatorios totalmente degenerados, es decir, compuestos de constantes. Supongamos por ejemplo que se trate de determinar el enlace funcional entre dos magnitudes experimentales x e y : $f(x, y) = 0$. El proceso estocástico se interpreta del modo siguiente: las variables de rangos impares denotan las medidas sucesivas de x; las de rango par, las medidas correlativas de y. Todas son degeneradas[71]. El conjunto de los estados de la naturaleza está pues constituido por todos los procesos estocásticos tales que las variables z_{2i-1} y z_{2i} tengan funciones de repartición que dan un salto de 0 a 1 para valores z_{2i-1} y z_{2i}, ligadas por la ecuación $f(z'_{2i-1}, z'_{2i}) = 0$.

Naturalmente, una decisión terminal vuelve a aceptar condiciones restrictivas concernientes a esta función f.

Pero la solución de un problema de este tipo no será posible más que en el momento en que se haya definido una función de pérdida. ¿Cómo estimar la pérdida, cuando se trata de una decisión que consiste en la admisión de una hipótesis científica? La arbitrariedad de toda estimación salta a la vista y ha sido reconocida[72]. Supongamos que se retiene la función de pérdida simple[73]. Estamos entonces en presencia de un caso típico de degeneración del modelo formal: proceso aleatorio degenerado, función de decisión truncada, función de pérdida simple, el modelo formal no es tampoco instructivo. Se extraerán de él exclusivamente conclusiones triviales del tipo "excluir las leyes incompatibles con los datos experimentales" o "la probabilidad del error es tanto más débil cuanto más lo son las hipótesis mantenidas". La transposición del problema inductivo a problema de decisión estadística no permite la adquisición de ningún resultado desconocido en las más banales teorías de la inducción.

Es verdad que podrían concebirse otras situaciones más favorables. Forjemos una ficción tratando de brindar el máximo de argumentos a los que pretenden que la teoría de la decisión estadística puede ayudar al epistemólogo a resolver los problemas de la inducción. La cuestión es siempre la determinación del enlace funcional entre dos magnitudes experimentales. Se supone limitado el conjunto de los enlaces posibles: entre las condiciones del problema figuran la restricción del conjunto de los "estados de la naturaleza" a una familia determinada de enlaces funcionales. Una decisión terminal consiste en aceptar la hipótesis según la cual el enlace de dos magnitudes está expresado por una función particular. Pero se tiene en cuenta el hecho de que pueden producirse errores en las medidas de las magnitudes. Por eso

---

[71] Es decir, sus funciones de repartición saltan de 0 a 1 para un valor determinado.

[72] Cf. **Matalon** (B.): *E.P.*, p. 551.

[73] Recordemos que tiene el valor 0 si la hipótesis mantenida es verdadera, el valor 1 en el caso contrario.

no se supone degenerado[74] el proceso estocástico. Ninguna observación excluye radicalmente una ley, dado que se puede poner a cuenta de errores de las observaciones la divergencia entre los resultados observados y las previsiones. Al complicar así el modelo, nos aproximamos a condiciones concretas de su aplicación. En cuanto a la función de pérdida, se podría definirla así: habida cuenta del hecho de que la ley mantenida al término del procedimiento de decisión sirve esencialmente para predecir el valor de una magnitud cuando la otra es conocida, se mide la pérdida por la desviación entre previsiones fundadas sobre una inducción errónea y valores verdaderos. Cuando se trata de precisar esta idea, se abren muchas posibilidades. Por ejemplo, se puede medir la pérdida por la desviación máxima: si se mantiene f' cuando f es verdadera la pérdida será $\sup_{\substack{x\in D\\ y\in D'}} |f(x,y) - f'(x,y)|$. (Siendo D y D' el dominio de variación de x y de y, o una parte de ese dominio: aquél en que se hacen comúnmente medidas y predicciones.) O si a f y f' corresponden las funciones explícitas $y = \varphi(x)$ e $y = \varphi'(x)$, se medirá la pérdida por $\sup_{x\in D} |\varphi(x) - \varphi'(x)|$.

Se podrían imaginar, naturalmente, otras soluciones [75]. Pero poco importa proseguir el análisis en esta dirección. Queríamos mostrar, simplemente, la posibilidad de construir un esquema de razonamiento mucho más rico que el que habíamos considerado previamente. La idea directriz de esta construcción es simple: una inducción errónea cuesta tanto más barata cuanto es una mejor "aproximación" a la verdad. Admitido este principio, basta con introducir algunas convenciones, más o menos razonables, para medir ese grado de aproximación y el problema inductivo se presentará como una cuestión de decisión estadística en el sentido de **Wald**. No se excluye que, en ciertas circunstancias privilegiadas (a saber, si el conjunto de los estados de la naturaleza puede estar suficientemente limitado), la teoría construida por **Wald** permita la obtención de resultados no triviales. ¿Quiere decir esto que contribuye realmente a resolver los problemas de la inducción?

No lo creemos. El tipo de razonamiento que acabamos de esbozar reposa sobre una convención y esta convención rebosa de una profunda incomprensión de la obra científica. Se mide el valor de un enunciado por la precisión de las predicciones que permite, no por esa significación teórica que resulta de su inserción en el conjunto del saber científico en curso de desarrollo. Se estima la pérdida por los errores que resultan de su utilización en un dominio bien definido, olvidando que hay otras consecuencias que pueden resultar de su admisión y que, por regla general, la importancia de un error científico es radicalmente imprevisible. En suma, nos colocamos en la óptica de ese "pragmatismo de la medida" que hacía menospreciar la teoría de la relatividad porque complicaba inútilmente el formalismo para efectos de segundo orden. Se sabe a qué decisiva crítica ha sometido **Bachelard** a semejante

[74] Estará formada de variables repartidas en función de la ley de error admitida.

[75] Tomar, por ejemplo, los valores medios o ponderados por probabilidades *a priori*, o estimar por el cuadrado desviaciones, etc.

epistemología[76]. En la circunstancia presente, el error cometido aparece a plena luz: radica en la identificación del coste del error con la imprecisión de las predicciones en un dominio determinado.

En resumen, la situación es la siguiente: no se excluye que el concepto de juego estadístico encuentre aplicación en el tratamiento de los problemas inductivos. Pero, una de las dos cosas: o bien se trata de problemas generales, carentes de una real significación epistemológica. En tales aplicaciones, no puede intervenir sino un modelo profundamente degenerado, en modo alguno instructivo y que sólo sirve para introducir un vocabulario cuya novedad no debe enmascarar su esterilidad. O bien, para hacer funcionar el modelo de modo eficaz, se restringe la cuestión a un punto tal en que ya no es un problema teórico, sino una cuestión práctica concerniente no a la verdad científica sino a las consecuencias que resultan de la aplicación de un cierto saber en un dominio determinado.

El análisis de este último ejemplo prueba que los conceptos más ricos de la teoría de la inferencia estadística no pueden ser utilizados en un análisis formal de la inducción. Sabíamos ya que los métodos de esta disciplina no aportaban ninguna solución a los problemas fundamentales de la inducción. La inferencia estadística no es, por tanto, ni una lógica inductiva probabilitaria, ni un modelo para una disciplina de ese tipo.

[76] Cf. *V.I.R.*, principalmente cap. 1, pp. 14-19. (La expresión "pragmatismo de la medida" es introducida en la p. 10.)

CAPITULO IV

LAS TAREAS DE LA LOGICA INDUCTIVA PROBABILITARIA

Un análisis formal que no utilice el concepto de probabilidad es incapaz de participar en la fundamentación del conocimiento experimental. Ni puede determinar los principios que justificarían las inferencias inductivas más elementales, ni formular un cuerpo de reglas inductivas coherentes, ni esclarecer la noción de confirmación. Sin embargo, las ciencias experimentales ofrecen el ejemplo de un conocimiento obtenido por inducción y que, por hipotético que sea, merece de todas formas la confianza que le otorgamos. Este conocimiento no está jamás definitivamente establecido, pero la mayor parte de las previsiones que se fundan sobre su uso se verifican de modo efectivo. Aunque incierto, no está por ello menos fundado; aunque susceptible del mentís de la experiencia, es racional. Nos vemos impulsados a decir que las leyes y las teorías que lo constituyen son plausibles o probables, e incluso, de manera más precisa, que algunas de ellas son más probables que otras. Llamaremos *inductivo* al concepto de probabilidad que aparece en enunciados de ese tipo.

Era natural que se forjara el proyecto de explicitar los principios sobre los que descansan tales juicios. Al explicitarlos, se brindaba, quizás, el medio de extender su campo de aplicación y, eventualmente, de fundarlos. Equivocadamente o con razón, se ha pensado que esos principios eran reglas formales análogas a las reglas de la lógica deductiva. Así se impuso la idea de un análisis formal que no conduciría sino a otorgar una simple probabilidad a las conclusiones de las inferencias inductivas. Llamaremos lógica inductiva probabilitaria a un análisis de ese tipo.

Muchos autores han creído que la clave del problema residía en la identificación del concepto inductivo y del concepto matemático de probabilidad. Identificar esos conceptos significa, ante todo, que están sometidos a las mismas leyes formales, a los mismos axiomas. Pero significa igualmente que el análisis de la significación de los enunciados en que figuran deberá concluirse de la misma manera y abocar a los mismos resultados, se trate de uno o del otro de esos conceptos. Así "probabilidad" tendría el mismo sentido en los dos enunciados siguientes: "La probabilidad de que salga cruz al tirar esta moneda es 1/2" y "la probabilidad de que los principios de la mecánica cuántica sean verdaderos es igual a 3/4". Esta identificación de la probabilidad inductiva con la probabilidad matemática sería el único medio de dar un sentido preciso al concepto vago de probabilidad inductiva y de hacer posible la constitución de una lógica inductiva probabilitaria. Además, operada la asi-

milación, la lógica inductiva estaría totalmente constituida: se confundiría con la teoría matemática de probabilidades.

La condición era drástica y la esperanza vana. Como hemos visto, ni siquiera los capítulos más sutiles de la teoría de la inferencia estadística pueden estimarse como desarrollos que constituirían una lógica inductiva plenamente satisfactoria. Al epistemólogo no le basta con poder leer los trabajos de los probabilistas para que se resuelvan los problemas que él plantea a propósito del conocimiento inductivo. Si la lógica inductiva probabilitaria es posible, está por constituir, y si, en su construcción, es no sólo útil sino necesaria una cierta analogía entre probabilidad inductiva y probabilidad matemática –pues no se ve cómo, sin ella, merecería su nombre la probabilidad inductiva– nada justifica que se imponga *a priori* la identificación pura y simple de esos dos conceptos.

Pero si la lógica inductiva está por construir, ¿qué vía seguiremos para emprender esta construcción? La consideración del fin ideal a alcanzar nos ayudará a responder a esta pregunta.

Supongamos constituido un lenguaje de la ciencia, en otros términos, construido un lenguaje formalizado en el que todas las leyes, todas las teorías, todos los protocolos de observación encuentren su expresión. Naturalmente, ese lenguaje formalizado deberá presentarse bajo la forma de un sistema semántico: a los axiomas y a las reglas de inferencia de la lógica deductiva, válidas para las fórmulas de ese lenguje, se añadirán reglas de interpretación, presentadas bajo la forma de postulados de significación, de tal suerte que la noción de verdad lógica estará definida por todas las fórmulas de ese lenguaje. Habríamos construido una lógica inductiva plenamente satisfactoria si, para toda pareja de fórmulas de ese lenguaje, estuviera definida la probabilidad de la primera fórmula cuando la segunda se estima como verdadera[1], si, además, se hubieran fundado las reglas que llevan a esta asignación de probabilidades y si, por último, el concepto de probabilidad recibiera un sentido tal que estuviera justificada la preferencia que otorgamos a las leyes más probables.

Hablando formalmente, un ideal semejante no es irrealizable. Sea $\mathscr{S}$ el sistema semántico que constituye el lenguaje de la ciencia. Supongamos, como es obvio, que los esquemas tradicionales de axiomas del cálculo de proposiciones sean válidos para $\mathscr{S}$ y que el *modus ponens* sea una de las reglas de inferencia. Se demuestra fácilmente entonces que, sobre el conjunto F de las fórmulas de $\mathscr{S}$, "$\vdash_{\mathscr{S}} \alpha \equiv \beta$" define una relación de equivalencia que es una congruencia para los conectores proposicionales y que el cociente de F para esta relación es un álgebra de **Boole** para las leyes-cocientes obtenidas a partir de los conectores "$\vee$", "&", "$\sim$"[2]. A reserva de que se sa-

[1] Se excluirá naturalmente el caso en que la segunda fórmula sea lógicamente falsa.

[2] Cf. Apéndice 2. Procede hacer notar que la construcción de una lógica inductiva probabilitaria exige el uso de una semántica. Así, interesa tomar en consideración aquí la noción semántica de verdad lógica y no el concepto sintáctico de tesis. Un ejemplo lo muestra fácilmente. Sea P un predicado monádico, a_1 y a_2 dos constantes; h designa la fórmula "$P(a_1)$", e "$P(a_2)$". Si se fija como regla de interpretación que a_1 y a_2 designan el mismo objeto, $h \equiv e$ se-

tisfagan ciertas condiciones débiles (exclusión de las fórmulas de longitud infinita), estamos incluso seguros de que esta álgebra es, al menos, enumerable. Es pues posible probabilizarla. La única dificultad encontrada concerniría a la definición de una medida *completa,* ya que la exclusión de las disyunciones infinitas implica que el álgebra considerada no es un álgebra σ. Pero dejemos de lado ese problema.

Por otra parte, se puede preguntar si la probabilidad tiene por argumentos las proposiciones o las fórmulas que las expresan. La tradición quiere que se hable de probabilidad a propósito de las proposiciones, pero la terminología que acabamos de utilizar muestra que nos inclinamos hacia la segunda solución. **Carnap** ha dado razones que justifican esta elección[3] y nos adherimos a su opinión. Supongamos que los argumentos sean proposiciones; en los enunciados de probabilidad aparecerán nombres de proposiciones que denotarán, por tanto, valores de verdad. Pero es claro que, en un enunciado de probabilidades, no se pueden operar sin riesgo sustituciones entre fórmulas de la misma denotación, es decir, del mismo valor de verdad. Si los argumentos de las probabilidades son proposiciones, la lógica inductiva no será extensional y se impondrá el recurso a una teoría de la modalidad para desarrollarla. En cambio, se puede constituir una lógica extensional si se toman las fórmulas por argumentos. La sustitución de un nombre de una fórmula por otro nombre de la misma fórmula estará permitida y se evitará el recurso a la lógica modal. Elegimos, pues, tomar como argumentos de las probabilidades a las fórmulas: en los enunciados de probabilidad figuran sus nombres (en lo que sigue, α, β, etc... son variables sintácticas). Sin embargo, es preciso hacer notar que en la mayoría de los casos se puede, sin riesgo de error, hacer uso de la convención de autonimia que emplearemos algunas veces sin indicarlo.

Una vez resuelto ese problema, cuya solución apenas tiene repercusiones sobre el plano de los desarrollos técnicos, la construcción de una lógica inductiva puede emprenderse según dos métodos, por lo demás equivalentes. Se puede definir una probabilidad "absoluta" "p" sobre el conjunto de las clases de fórmulas. Se atribuirá a cada fórmula la probabilidad de la clase a la que pertenece. Esto viene a definir sobre F una función numérica que satisface los axiomas siguientes:

A. 1. – Para toda fórmula α, $0 \leqslant p(\alpha)$.
A. 2. – Si $\vdash \alpha \equiv \alpha'$ entonces $p(\alpha) = p(\alpha')$.
A. 3. – Si $\vdash \alpha$ entonces $p(\alpha) = 1$.
A. 4. – Si $\vdash \sim (\alpha \,\&\, \beta)$ entonces $p(\alpha \vee \beta) = p(\alpha) + p(\beta)$.

Se demuestra fácilmente que $p(\alpha) \leqslant 1$ y que $\vdash \alpha \supset \beta$ entraña $p(\alpha) \leqslant p(\beta)$.

---

rá una verdad lógica sin ser una tesis. Ahora bien, está claro que esas reglas imponen que la probabilidad de h, cuando se tiene e, sea igual a 1, mientras que la ausencia de vinculación sintáctica entre esas dos fórmulas autorizaría otra asignación de esa probabilidad. En lo que sigue, utilizaremos el símbolo de aserción sin indicar el sistema al que nos referimos si esta omisión no entraña ninguna confusión. Sin embargo, es preciso mantener presente en el espíritu la idea de que ese símbolo designa la aserción a título de verdad lógica en el sentido de la semántica.

[3] *L.F.P.,* § 52, pp. 280-283.

La probabilidad condicional, o relativa, definida sobre el conjunto de las parejas de fórmulas tales que $p(\beta) \neq 0$ se introducirá entonces estableciendo: $c(\alpha, \beta) = \dfrac{p(\alpha \,\&\, \beta)}{p(\beta)}$.

Pero se puede definir asimismo, directamente, la probabilidad condicional "c" sobre el conjunto $F \times F'$ (designando F' el conjunto de las fórmulas que no son lógicamente falsas). "c" deberá satisfacer los siguientes axiomas:

A'. 1. – Si $\vdash \alpha \equiv \alpha'$ y $\vdash \beta \equiv \beta'$, $c(\alpha, \beta) = c(\alpha', \beta')$.
A'. 2. – Para toda pareja $\langle \alpha, \beta \rangle$, se tiene $c(\alpha, \beta) \geqslant 0$.
A'. 3. – Si $\vdash \beta \supset \alpha$ entonces $c(\alpha, \beta) = 1$.
A'. 4. – Si $\vdash \beta \supset \sim (\alpha \,\&\, \alpha')$, entonces $c(\alpha \vee \alpha', \beta) = c(\alpha, \beta) + c(\alpha', \beta')$.
A'. 5. – $c(\alpha \,\&\, \alpha', \beta) = c(\alpha, \beta) \cdot c(\alpha', \alpha \,\&\, \beta)$.

Se demuestra fácilmente que este sistema es equivalente al precedente en el sentido de que, si "t" designa una fórmula lógicamente verdadera y si se establece $p(\alpha) = c(\alpha, t)$, p satisface A.1-4 y $c(\alpha, \beta) = \dfrac{p(\alpha \,\&\, \beta)}{p(\beta)}$. Del mismo modo, toda función c definida a partir de una función p que satisface A.1-4 satisface A'.1-5[4].

Sin embargo, la ausencia de imposibilidad formal no significa que ese ideal pueda ser alcanzado, ni siquiera que tenga sentido. Apenas se ve cómo determinar esta asignación de probabilidad si no es procediendo de un modo enteramente arbitrario, y, entonces, sería necesario abandonar la esperanza de justificar la confianza otorgada a las hipótesis más probables. Pero es la idea misma de constituir un lenguaje de la ciencia que permita expresar todos los enunciados científicos presentes o futuros la que sería preciso poner en cuestión. A lo sumo, se puede esperar formalizar el conocimiento científico actual y se verá ulteriormente qué graves consecuencias resultan de esta limitación en cuanto al alcance y a la significación epistemológica de una lógica inductiva probabilitaria.

Por más que ocurra esto, sólo hay un autor que haya pretendido dar un método que permita la asignación de la probabilidad a cualquier hipótesis y justificar los principios sobre los que reposa esta asignación. Este autor es **Reichenbach**, y veremos la fragilidad del sistema que ha construido. Todos los otros lógicos que han aportado su contribución en ese dominio han tenido, de hecho, objetivos mucho más modestos. Para ellos, se trataba simplemente de construir segmentos muy limitados de lógica inductiva. Sólo definían la probabilidad de una hipótesis en condiciones muy restrictivas. Todos proclamaban la necesidad de una larga serie de trabajos antes de que se alcanzaran resultados científicamente importantes y epistemológicamente significativos. Pero, al restringir demasiado sus ambiciones, corrían el

[4] Cf., por ejemplo, **Helmer** (O.) y **Oppenheim** (P.); *S.D.P.*, § 3 y 4, p. 27-30. La equivalencia se adquiere con la reserva de que, en el segundo sistema, $c(\alpha, \beta)$ se define si no se tiene $\vdash \beta$ y, en el primero, si $p(\beta) \neq 0$. La segunda condición es más fuerte que la primera.

riesgo de no probar lo que querían probar, a saber, la posibilidad de una lógica inductiva probabilitaria. El primer problema por resolver consiste en determinar las condiciones mínimas que debe satisfacer un desarrollo para que merezca ser estimado como un fragmento de lógica inductiva probabilitaria. A continuación, será necesario buscar en qué condiciones escapa a lo arbitrario, sobre qué principios firmes puede descansar la construcción. Por último, deberemos determinar lo que se requiere para que se tenga derecho a considerar que la lógica inductiva probabilitaria justifica efectivamente el conocimiento experimental.

1. Las condiciones formales de adecuación y la extensión mínima de una lógica inductiva probabilitaria

El imperativo de restringir el problema de la construcción de una lógica inductiva probabilitaria, de resolver sólo sus formas más simples, se ha impuesto en la mayor parte de los investigadores como la condición del éxito de la empresa. Esta limitación del problema se obtiene recurriendo a uno o a varios de los procedimientos siguientes:

1) Renunciar a la identificación entre la probabilidad inductiva y la probabilidad matemática. No introducir sino una simple analogía entre los dos conceptos, a fin de concederse más libertad en la construcción.

2) Limitarse ya sea al lenguaje al que se refiere una lógica inductiva, ya sea al conjunto de fórmulas que será probabilizado.

3) Definir una medida de la probabilidad que únicamente tiene en cuenta algunos de los elementos tomados en consideración en una estimación intuitiva y global de la probabilidad de una hipótesis.

Tenemos que describir cada uno de estos procedimientos de la manera más precisa e interrogarnos acerca de la legitimidad de su empleo.

Un principio que se impone es que es preciso mantener algún parentesco entre la probabilidad inductiva y la probabilidad matemática. Ningún autor ha pretendido definir un concepto formal de la probabilidad que sea radicalmente distinto de la probabilidad matemática. Además, al alejarse demasiado del modelo matemático, se corre el riesgo de formular enunciados cuya significación quedaría indeterminada. Pero, en cambio, incluso si nos ceñimos al caso en que se intenta determinar una probabilidad numérica de las hipótesis inducidas, no se puede exigir al primer golpe que esta probabilidad satisfaga todas las condiciones formales impuestas por la noción matemática. No se excluye, pues, que la axiomática utilizada sea ligeramente diferente de la que hemos presentado en las páginas anteriores.

Pero, ¿qué axiomas conservaremos, si se trata de probabilidad numérica? Más vale no tocar a los límites de la función de probabilidad que son cuestión de comodidad. También son obvios los principios que otorgan, respectivamente, las probabi-

lidades 0 y 1 a las fórmulas lógicamente falsas o lógicamente verdaderas. La supresión del principio de adición corre el riesgo de tener consecuencias demasiado ruinosas para que se lo ponga en tela de juicio[5]. Se deduce inmediatemente de ello que si $h \vdash e$, entonces $c(h, \sim e) = 0$[6]. Este enunciado tiene un sentido evidente; supongamos que de la hipótesis h se deduce un hecho que la experiencia invalida, h tendrá una probabilidad nula[7]. Por indiscutible que resulte ese principio, de todas formas ocurre que un sistema célebre[8] lo viola. Queda el principio de las probabilidades compuestas, que aparece bajo la forma de A'.5 cuando se parte del concepto de probabilidad condicional. Su supresión hace imposible la derivación, a partir de la probabilidad condicional, de una probabilidad absoluta equivalente a ella[9]. Pero esta consecuencia no es una catástrofe en un sistema de lógica inductiva y apenas se encuentra razón para prohibir esta supresión. El hecho es que ha sido propuesto un sistema en el que ese principio no es respetado en absoluto[10]. Parece que ése sea el único debilitamiento concebible de los sistemas de axiomas clásicos, si se trata de determinar un grado numérico de probabilidad inductiva.

Pero una lógica inductiva puede ser probabilitaria sin que se asigne una probabilidad de numérica a las hipótesis. Bastará con que se determine un orden de probabilidad, esto es, que se pueda decir, respecto de dos hipótesis, cuál es la más probable o, para hablar en términos de probabilidades condicionales, si α es más probable cuando se tiene β, que α' cuando se tiene β'. Se puede asimismo ir más lejos y clasificar simplemente las hipótesis en probables e improbables, o en muy probables, bastante probables, poco probables, etc... En suma, para utilizar la terminología de **Carnap**[11], existen tres formas del concepto de probabilidad y se puede constituir una lógica probabilitaria numérica, comparativa o simplemente clasificadora.

---

[5] Sin ese principio no se puede demostrar ni siquiera que el debilitamiento de una hipótesis acrecienta su probabilidad.

[6] Se tiene $p(h \supset e) = 1$ y, por el teorema de adición, $p(\sim (h \supset e)) = p(h \,\&\, \sim e) = 0$; por tanto, $c(h, \sim e) = \dfrac{p(h \,\&\, \sim e)}{p(\sim e)} = 0$, lo que supone $p(\sim e) \neq 0$.

[7] Observemos que ese principio significa que es nula la probabilidad de una hipótesis una de cuyas consecuencias es invalidada por la experiencia, sean cuales sean, por otra parte, los datos de la experiencia. Sea e' la fórmula que expresa el conjunto de los datos de observación relevantes en la apreciación de la probabilidad de h. Entre esos datos figura la invalidación de una consecuencia de h. En otros términos, $e' \vdash \sim e$ y $h \vdash e$. Se tiene entonces $c(h, e') = 0$. En efecto, $e \vdash \sim e'$ y por tanto $h \vdash \sim e'$; se concluye de ahí $c(h, \sim\sim e') = c(h, e') = 0$.

Basta incluso con que, de la hipótesis y de aquéllo cuya aserción autoriza la experiencia, pueda concluirse una consecuencia invalidada por la experiencia para que la probabilidad de la hipótesis sea nula. Sea e' un conjunto de datos de observación; si se tiene $h, e' \vdash e$ y $h \vdash (e' \supset e)$, lo que se escribe también como $h \vdash \sim (e' \,\&\, \sim e)$, y si la experiencia establece además la falsedad de e, por tanto, la verdad de $(e' \,\&\, \sim e)$ se tendrá pues $c(h, e' \,\&\, \sim e) = 0$.

[8] Se trata, como se verá, del sistema de **Reichenbach.**

[9] Dado que de la definición de la probabilidad absoluta y de los solos axiomas A.1 a A.4, no se ve apenas cómo debilitarlos, se concluye A'.5.

[10] **Helmer,** (O.) y **Oppenheim** (P.): *S.D.P.*

[11] *L.F.P.*, p. XV-XVI y § 4, p. 8-11.

Hablando formalmente, sea A una parte del conjunto $F \times F'$ relativo a un sistema semántico $\mathscr{S}$. Una lógica inductiva numérica está definida sobre A si para todo elemento de A se determina una probabilidad numérica c que satisfaga los axiomas de A'. 1-4 (y circunstancialmente también A'. 5). Una lógica comparativa exige únicamente que se defina un orden sobre A, una lógica clasificadora que se opere una partición de A.

Una lógica comparativa puede considerarse como una forma debilitada de lógica numérica; una lógica clasificadora, como una forma débil de lógica comparativa. En efecto, una lógica numérica induce una lógica comparativa sobre su conjunto de definición: basta con elegir como orden el orden natural de los grados de probabilidad. En cambio, al determinarse un orden sobre A, no se sigue de ahí que se definan grados de probabilidad para los elementos de A. Las relaciones de la lógica comparativa con la lógica clasificadora son análogas. Por ejemplo, definido un orden sobre A, basta con elegir en A un elemento cualquiera y estimar como probable los elementos superiores a éste, como improbables los que no lo son, y se habrá determinado una partición de A.

No está exento de interés tomar en consideración estos debilitamientos del ideal que primitivamente se había asignado a la lógica inductiva probabilitaria. En efecto, si las lógicas clasificadoras no han dado lugar a ningún trabajo interesante, no ocurre lo mismo con las lógicas comparativas. Hagamos notar, ante todo, que su construcción sería de un gran valor para la epistemología si estuvieran definidas sobre conjuntos bastante amplios. Sería un resultado importante poder decir, acerca de dos hipótesis inductivas, cuál es la más probable, y fundar en razones un juicio semejante. Además, parece que se puede, intuitivamente, comparar probabilidades en tanto que no se puede asignarles grados numéricos. En estas condiciones, la lógica comparativa parece más fácil de construir, más natural que la lógica numérica y es posible que el concepto comparativo de probabilidad conserve un sentido en dominios en que el concepto numérico no tiene ninguno. Esta tesis, hacia la que inclina el sentido común, es la de **Keynes**, quien no impone ni siquiera que el orden de probabilidades sea total, ni que sea denso[12] el conjunto sobre el cual está definido. Veremos, por otra parte, que ciertos métodos permiten definir un orden aceptable en el momento mismo en que llevan a asignaciones de probabilidad numérica inadmisibles[13]. Así, nada excluye que no sea preciso, ya contentarse con una lógica comparativa, ya comenzar por construir una lógica de ese tipo.

Pero ¿qué requisitos debe satisfacer el concepto comparativo de probabilidad para que sea aceptable? La mejor manera de determinarlos es derivarlos de los axiomas mantenidos para el grado numérico de probabilidad. Sobre A se definirá, pues,

[12] Es lo que resulta de *T.P.*, cap. 3, § 19-21, pp. 38-40. (**Keynes** denomina "compacto" a un conjunto denso.)

[13] Cf. **Kemeny** (J.): *L.M.F.*

una relación de orden, o más bien un pre-orden[14], con la notación "$\leqslant_p$". Del hecho de que toda probabilidad numérica esté comprendida entre 0 y 1 y de que se tenga $c(\alpha, \beta) = 1$ desde que $\vdash \beta \supset \alpha$, se concluye que una pareja que verifica esta condición es un elemento maximal de A. Del mismo modo, $\langle \alpha, \beta \rangle$ es un elemento minimal si $\vdash \beta \supset \sim \alpha$. Del axioma A'. 4 se concluye:

$$(\alpha \vee \alpha', \beta) \geqslant_p (\alpha, \beta)$$
$$(\alpha \vee \alpha', \beta) \geqslant_p (\alpha', \beta)$$

Se podrían multiplicar las condiciones de este tipo. Es lo que ha hecho **Koopman**, quien ha propuesto un sistema de axiomas para el concepto intuitivo de probabilidad ordinal[15]. No nos interesa, por el momento, determinar una lista exhaustiva de los axiomas de la probabilidad comparativa. Quisiéramos mostrar simplemente que la construcción de una lógica comparativa es posible incluso si no se ha definido previamente un grado numérico de probabilidad.

Así puede simplificarse la tarea a cumplir, sea porque no nos sujetemos a respetar el principio de las probabilidades compuestas, sea porque nos limitemos a la construcción de una lógica ordinal. Pero, naturalmente, la simplificación esencial reside en la limitación del conjunto de las parejas de fórmulas para las que se definirá una probabilidad. Sin embargo, esta restricción plantea cuestiones en la medida en que corre el riesgo de llevar a la construcción de sistemas desprovistos de toda significación epistemológica. Es claro que no nos podríamos contentar con asignar probabilidades en los casos triviales en que su valor resulta de las condiciones formales. Por ejemplo, no basta con afirmar que $c(\alpha, \beta) = 1$ porque $\vdash \beta \supset \alpha$, para que se esté en presencia de una lógica inductiva. En cuanto a la integración de la teoría matemática de probabilidades en la lógica inductiva, es igualmente decepcionante. Cierto que los enunciados de esta teoría pueden ser presentados bajo una forma tal que conciernen, no a la probabilidad de los sucesos, sino a la de las proposiciones que afirman su producción. Así, se pueden calcular probabilidades de proposiciones, como se requiere hacerlo. Pero, excluidos los casos triviales, estos enunciados se presentan bajo la forma de implicaciones que no permiten calcular el valor de ciertas probabilidades sino cuando se conocen otras probabilidades. Son pues insuficientes para resolver el problema que está aquí en cuestión. ¿Cuál es pues, en esta materia, el mínimum requerido para que se tenga el derecho de afirmar, respecto a un desarrollo, que pertenece a la lógica inductiva?

Una respuesta a esta pregunta puede derivarse de la condición que hemos impuesto a la lógica inductiva, a saber, que englobe una teoría de la inducción primaria. Sea $P(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula abierta bien formada de L; $i_1, \ldots, i_n$, nombres de constantes que son respectivamente del mismo tipo que $x_1, \ldots, x_n$. Pedire-

[14] Un pre-orden, dado que de $\langle \alpha, \beta \rangle \leqslant_p \langle \alpha', \beta' \rangle$ y $\langle \alpha', \beta' \rangle \leqslant_p \langle \alpha, \beta \rangle$ no se podría concluir la identidad de $\langle \alpha, \beta \rangle$ y $\langle \alpha', \beta' \rangle$.

[15] Cf. *A.A.P.*

mos que se defina la probabilidad $c(h, e)$ para al menos una pareja de fórmulas h y e del tipo siguiente:

1.º P no es un predicado lógicamente determinado (dicho de otro modo, no se tiene ni $P = \overline{1}$, ni $P = \overline{0}$).

2.º e es una función booleana de fórmulas del tipo $P(i_1, ..., i_n)$.

3.º h se obtiene a partir de la fórmula abierta $P(x_1, ..., x_n)$ por generalización y especificación eventual de ciertos argumentos, estando excluidos[16] los casos en que se tuviera $\vdash e \supset h$ o $\vdash e \supset \sim h$.

Para las lógicas comparativas, interesaría determinar una condición análoga, pidiendo, por ejemplo, que se puedan comparar las probabilidades de dos leyes distintas, siendo los segundos argumentos proposiciones singulares. Habida cuenta del papel relativamente subordinado que jugarán los sistemas de ese tipo en nuestro estudio, no nos preocuparemos de determinar con más rigor esta condición. Hagamos notar, simplemente, que volverá a exigir que sean comparables parejas de elementos cuyo orden no puede concluirse de la consideración única de los axiomas impuestos a un orden inducido.

Pero no basta con fijar la extensión mínima de una lógica inductiva. También es necesario preguntarse si es aceptable el método que consiste en comenzar por la construcción de sistemas de extensión restringida. Lo que da a este procedimiento una apariencia de legitimidad es la analogía con la lógica deductiva. En esta última disciplina, la costumbre es constituir primero sistemas, tal como el cálculo de proposiciones, que no permiten formalizar más que ciertos razonamientos particularmente simples. Se exigirá, a continuación, que los sistemas más complejos constituyan extensiones de éstos. Así, el cálculo de predicados contiene al cálculo de proposiciones en el sentido de que las tesis del segundo son tesis del primero. Es obvio que una condición análoga debe introducirse en lógica inductiva. Pero falta por saber si es fácil de satisfacer en ella. Veremos que no ocurre nada de eso: en algunos sistemas $c(\alpha, \beta)$ depende no sólo de α y de β sino también de ciertos caracteres del lenguaje al que pertenecen α y β[17]. La extensión de la lógica inductiva planteará, por tanto, problemas delicados.

Además, ¿es efectivamente utilizable un sistema limitado de lógica inductiva? La pregunta análoga, planteada a propósito de la lógica deductiva, recibía una respuesta evidente. Teniendo en cuenta el hecho de que una fórmula deducible de un con-

[16] Esta última condición elimina los casos siguientes:

1.º h es e, o e es una conjunción en la cual figura h a título de componente; por ejemplo, h es "*Pa, b*", e "*Pa, b & Pa, c*".

2.º h es general, pero implicada lógicamente por e. Supongamos, por ejemplo que P sea monádico y que un postulado de significación sea $(x)(x = a \vee x = b)$. Si e es "*Pa & Pb*", h "(x) *Px*", se tiene $e \vdash h$. Era preciso excluir seudo-generalizaciones semejantes.

Pedimos pues, simplemente, que un sistema de lógica inductiva permita calcular la probabilidad de una auténtica inducción de algunos a todos, o de algunos a otro.

[17] Es el caso de la función propuesta por **Carnap** en *L.F.P.*

junto de premisas lo es igualmente de todo conjunto más amplio, una teoría limitada de la deducción tiene un sentido y un uso. Permite aseverar ciertas proposiciones desde el momento en que se conocen como verdaderas otras proposiciones, y su verdad no se volverá a poner en cuestión si se introducen premisas nuevas que no encontraban su expresión en el sistema primitivo. Ocurre lo mismo si se añaden a un sistema nuevas reglas de inferencia. En materia de lógica inductiva, la situación es enteramente distinta. Supongamos establecido el enunciado $c(h, e) = r$. ¿Basta el conocimiento de la verdad de e para que se pueda concluir que la probabilidad de h es r? En modo alguno; antes es preciso que nos aseguremos de que e expresa, si no todas las proposiciones cuya verdad se conoce, al menos, de entre ellas, todas las que son relevantes en la estimación de la probabilidad de h. Este principio, conocido con el nombre de principio de la evidencia total, cuya validez es intuitivamente evidente, no ha sido jamás discutido y se podrían mostrar fácilmente las consecuencias catastróficas que resultarían de su abandono. Señalemos que no pertenece a la lógica inductiva *stricto sensu*, sino a las reglas metodológicas que determinan su uso.

La disparidad entre las reglas de separación de la lógica deductiva –el *modus ponens*– y de la lógica inductiva –el principio de evidencia total– muestran al instante las dificultades que encuentra una construcción progresiva de la lógica inductiva. Ante todo, la aplicación de este principio supone que sabemos discernir los factores pertinentes en la estimación de la probabilidad de una hipótesis. La distinción entre lo que es relevante y lo que no lo es debe preceder a la construcción de un instrumento formal adecuado[18]. Esto marca un límite del pensamiento formal en el análisis de la inducción. Para suponer efectuada esta distinción, será preciso que los sistemas formales tengan una extensión suficiente para permitir, en ciertos casos, calcular la probabilidad de una hipótesis relativa a toda la evidencia relevante en ese cálculo, sin la cual el sistema quedaría sin uso. Así, un sistema demasiado pobre, demasiado limitado, será a menudo de un uso nulo. Se imaginan fácilmente las dificultades con las cuales se corre el riesgo de topar. El imperativo que acabamos de señalar hace difícil, y quizás imposible, la construcción progresiva de una lógica inductiva.

Hay otra dificultad de la lógica inductiva que radica en la multiplicidad y en la naturaleza de los factores que intervienen en una estimación intuitiva de probabilidad inductiva. Proferimos juicios sobre la probabilidad de las hipótesis y la lógica inductiva tiene la obligación de explicitar los principios sobre los que se fundan tales juicios. Pero en la apreciación intuitiva y global de esas probabilidades, se toman en consideración factores múltiples, bastante mal definidos y, según parece, de naturaleza heterogénea. La extensión de la confirmación que aporta la experiencia es sólo un factor entre otros. La variedad de los casos de confirmación, la simplicidad más o menos grande de la hipótesis, su aptitud para insertarse en un sistema teórico, la naturaleza de las hipótesis rivales, juegan igualmente un papel. Ahora bien, es difí-

[18] Es decir, una definición de la relevancia posterior a la determinación de una probabilidad y dependiente de ella, como la propuesta por **Carnap** (*L.F.P.*, § 65, pp. 346-356), es inadecuada.

cil determinar el peso atribuido a cada uno de esos factores e incluso, más simplemente, definir lo que se entiende por simplicidad de una hipótesis o por variedad de los casos de confirmación.

Es claro que, entre esos factores, la lógica inductiva únicamente tomará en consideración aquéllos de los que es posible dar una definición formal, pero las investigaciones han sido decepcionantes en ese dominio. Es el caso, por ejemplo, del concepto de simplicidad. Han sido propuestas algunas medidas de la simplicidad de una hipótesis. Aunque convencionales, algunas son aceptables[19]. Pero no se aplican más que en condiciones muy restrictivas. En cuanto a otras medidas, que conciernen por otra parte a los casos más elementales (simplicidad de un sistema de predicados), son totalmente insuficientes[20]. Asimismo, el concepto de "variedad de casos", aparentemente inofensivo, es prácticamente imposible de definir por una vía estrictamente formal[21].

En esas condiciones, ha parecido bien construir lógicas inductivas que sólo tienen en cuenta ciertos factores tomados en consideración en una estimación de probabilidad. **Reichenbach** es el único autor que ha pretendido que en su sistema se integren todos los factores que intervienen en una estimación intuitiva de probabilidad, o al menos todos aquéllos dignos de ser retenidos. Los otros autores han sido más modestos en sus pretensiones. En realidad, pretenden solamente determinar una medida de la confirmación que tales datos de experiencia aportan a una hipótesis determinada. Así hablan a menudo, no de la probabilidad de las hipótesis, sino de su "grado de confirmación", o para emplear una expresión más parecida, de su "grado de soporte fáctico". Tal es, por ejemplo, la posición de todos los que se sitúan en la óptica de **Carnap**.

Pero restringir así el problema, ¿no es acaso mutilar de dimensiones esenciales la epistemología del conocimiento inductivo? ¿Qué uso haremos de esos grados de confirmación que no son probabilidades? El principio de la evidencia total puede concebirse de tal manera que imponga no sólo tener en cuenta todos los hechos relevantes, sino también todos los factores que juegan un papel en una estimación de probabilidad. Imponer a la lógica inductiva un objetivo tan limitado como la definición de un grado de confirmación, ¿no es acaso confesar la imposibilidad de un análisis formal del conocimiento inductivo? Si no podemos responder desde ahora a estas cuestiones, debemos plantearlas de una vez por todas.

Hemos fijado ciertas condiciones requeridas para que un desarrollo formal pueda considerarse como un segmento aceptable de lógica inductiva. Precisamos ver ahora según qué procedimientos puede emprenderse esa construcción.

---

[19] Cf. principalmente **Popper** (K.), *L.S.D.*, (§ 43, pp. 140-142, App. VIII, pp. 378-386), **Kemeny** (J.), *U.S.I.*, **Wrinch** (D.) y **Jeffreys** (H.), *C.F.P.*, **Jeffreys** (H.), *T.P.*, 1.62, *S.I.*, 2.65.

[20] Cf. **Goodman** (N.), *S. I.*, *L.S.P.*, *A.T.S.*

[21] Cf. **Watanabe** (S.); *E.M.I.I.*, § 12, pp. 104-106. Remitimos a la nota 40 del cap. II, donde se invoca esta dificultad.

2. Evidencia intuitiva y análisis formal en la teoría de la inducción

La lógica deductiva no se reduce a la construcción de sistemas formales arbitrarios. Estos sistemas únicamente parecen gratuitos a los que ignoran su interpretación. En realidad, el fin perseguido, al menos en la mayor parte de los casos, es la formalización de ciertos sectores de la lógica natural. Ocurre lo mismo en lógica inductiva. Sería un grave error creer que los problemas que se plantean pueden resolverse dando libre curso a lo arbitrario, a la convención. Para construir una lógica inductiva, no basta con definir una medida sobre un conjunto de fórmulas determinado y bautizarla como probabilidad o grado de confirmación. Es necesario, además, mostrar que la elección de esa medida se impone. Pero, excepto en los casos triviales, las condiciones formales resultan insuficientes para asignar probabilidades, incluso si se las retiene a todas, aun cuando una al menos sea discutible; incluso si se las toma en su forma más estricta, la que atañe a las probabilidades numéricas. Este hecho bien conocido se expresa a menudo diciendo que los axiomas de la probabilidad constituyen un sistema no-categórico. Quedan, pues, por encontrar reglas nuevas que permitirán eliminar lo arbitrario o, al menos, restringirlo.

Pero, ¿dónde buscar esas reglas? La lógica deductiva no podría dar más de lo que ha dado, a saber, la determinación de probabilidades en los casos extremos. Cuando **Leibniz**, después de haber afirmado que "la lógica de lo probable tiene otras consecuencias que la lógica de las verdades necesarias" –entendemos por ello que la probabilidad de una proposición puede demostrarse en casos en que no se concluye la verdad– declara que "la probabilidad misma de esas consecuencias debe demostrarse por las consecuencias de la lógica de las (verdades) necesarias"[22], expresa una esperanza que no podía ser defraudada. Son indispensables principios propios de la lógica de lo probable: a partir de las tesis de la lógica deductiva no se podría concluir un enunciado de probabilidad sino en los casos triviales. Todos los autores que han examinado seriamente la cuestión lo han comprendido. Es preciso, pues, añadir a las tesis de la lógica deductiva algunos principios que permitan asignar la probabilidad de ciertos enunciados obtenidos por inducción. ¿Quiere decir esto que esos principios determinarán completamente cualquier probabilidad inductiva? Puede que sea así. La regla de inducción de **Reichenbach**, el "silogismo estadístico" de D. **Williams**[23] tendrían tales virtudes, de creer a sus autores. Pero es posible contentarse con principios más modestos que no permitirán la asignación de probabilidades más que en casos particulares, hasta con principios que simplemente reducen la arbitra-

[22] *N.E.E.*, IV, cap. 17, § 5.

[23] Este principio, que se enuncia "Si sobre nA, m son B, entonces la probabilidad de que un A sea B es m/n" y que no es sino una formulación imprecisa de la regla de **Reichenbach**, es presentado por su autor como un "argumento deductivo" (Cf. *C.S.P.*). Se ha discutido con pleno derecho este punto de vista (Cf. **Chatalian** (G.), *I.V.P.* Estimar el silogismo estadístico como un argumento deductivo es aceptar que se le aplique la regla de separación y violar el principio de la evidencia total. **Chatalian** señala juiciosamente que la existencia de este principio muestra la irreductibilidad de la lógica inductiva a la lógica deductiva.

riedad en la elección de una función de probabilidad de alcance limitado. Por otra parte, y por el momento, el problema no es saber qué fuerza tendrán esos principios sino cómo determinarlos.

En esta circunstancia, parece que no hay más que un método para resolver este problema; es el mismo que se utiliza en la construcción de la lógica deductiva. Consiste en determinar un conjunto de principios intuitivamente evidentes, luego en explicitarlos, en formalizarlos. Del mismo modo que la lógica deductiva codifica las reglas a las que se somete la demostración válida, así la lógica inductiva tendrá como fin codificar los procedimientos que permiten estimar intuitivamente la probabilidad de una conclusión inducida. Saber si se puede limitar de esta manera el fin de la lógica inductiva, si su papel es simplemente proporcionar una reconstrucción de los métodos inductivos cuya validez se supone fuera de duda, es una cuestión que plantearemos en seguida. Pero no se puede dudar de que sea deseable que tenga, al menos, esa función. Entendamos por ello que una lógica inductiva debe volver a encontrar ciertos principios intuitivamente evidentes. Lo mínimo que se puede exigir es que no los contradiga, excluido el caso en que nos viéramos llevados a probar que principios igualmente evidentes son contradictorios entre sí. Ahora bien, atribuida esta función a la lógica inductiva, esas nuevas exigencias que se le imponen serán una ayuda en su construcción. Se puede esperar que, por su medio, se suprima la indeterminación en las asignaciones de probabilidad inductiva.

Pero este procedimiento no tiene ni la eficacia ni la seguridad que tenemos derecho a esperar. Los principios que atañen a la probabilidad inductiva no son ni numerosos ni ricos. Su enunciación deja que desear en cuanto a precisión y la mayoría se presentan bajo una forma tal que procede dudar de que constituyan reglas formalizables. Ahora bien, ni que decir tiene que sólo se tomarán en consideración los que no ponen en juego sino nociones formalizables. Suponiendo que los conceptos de simplicidad y de variedad de casos de confirmación no sean definibles formalmente, o que no se sepa dar la definición formal de ellos, lo que parece ocurrir, se precisará excluir las reglas en cuyo enunciado figuran. En estas condiciones, subsistirán únicamente algunos principios bastante pobres, de los que vamos a brindar la lista.

El primero y más simple de esos principios afirma que la probabilidad de una hipótesis se acrecienta por el conocimiento de un hecho que puede ser deducido de la hipótesis y que, en el caso en que ella fuera falsa, sería, si no imposible, al menos incierto. Este principio apenas puede ser discutido: no se puede dudar de que, en la circunstancia descrita, la probabilidad de la hipótesis no disminuye. ¿Crece necesariamente, como hemos supuesto? Parece que es preciso admitirlo, si se quiere reconocer que la experiencia nos enseña alguna cosa concerniente a las probabilidades de las hipótesis. Ese principio expresa, pues, que hay un aprendizaje por la experiencia[24]. Nos falta expresarlo formalmente. Para toda función de probabilidad condi-

[24] A propósito de un principio muy cercano a éste, **Kemeny** habla del "principle of learning from experiment".

cional, pediremos que satisfaga la condición siguiente, suponiendo que esté definida por las parejas de fórmulas consideradas: si $h, e \vdash e'$ y si no se tiene $\sim h, e \vdash e'$, entonces $p(h, e) < p(h, e \text{ y } e')$, excluidos naturalmente los siguientes casos: 1.º $p(h, e) = 1$, 2.º h & e es lógicamente falso[25].

¿Es necesario ir más lejos y suponer que la probabilidad de una hipótesis crece sin límite, dicho de otro modo, tiende hacia 1 cuando se multiplican hasta el infinito sus verificaciones? Naturalmente, no se estimará como verificación de la hipótesis más que el establecimiento de hechos que pueden concluirse de los hechos anteriormente establecidos, en el caso en que la hipótesis es verdadera, y no pueden concluirse de ella en el caso en que es falsa. Un principio de este tipo, que denominaremos *principio de la confirmación,* significa que un conocimiento que se funda sobre la experiencia puede aproximarse a la certeza tanto como se quiera. Es difícil tenerlo por la expresión de una exigencia fundamental de la razón y no podríamos contarlo entre el número de los primeros principios, intuitivamente evidentes, sobre los que se funda la lógica inductiva. Por el contrario, se puede pensar que procede *demostrarlo,* es decir, derivarlo de otros principios más seguros. Es indiscutible que una lógica inductiva que permitiera establecer un "teorema de la confirmación" para toda hipótesis general sería una teoría fuerte. Sería ya un resultado no despreciable demostrar ese teorema para ciertas leyes de un tipo determinado. Sin embargo, no es preciso ilusionarse ni sobre la necesidad de un resultado semejante ni sobre su suficiencia. Hemos dicho que el principio de la confirmación no expresa una exigencia racional. Un sistema que contradiga ese principio no está, por tanto, condenado en modo alguno. En cambio, la sola demostración del teorema de la confirmación no podría contentar al apistemólogo. Un enunciado tal es de tipo asintótico: atañe al límite hacia el cual tiende la probabilidad de una hipótesis cuando el número de sus verificaciones crece hasta el infinito. Ahora bien, no estamos jamás en posesión sino de un número finito de observaciones. El teorema de la confirmación no es, por tanto, útil, ni para medir la probabilidad de una hipótesis en una situación experimental efectiva, ni para comparar las probabilidades de hipótesis diferentes en la misma situación. Satisface al espíritu por la potencia que ejerce sobre la imaginación el mito del observador infinito. No puede sino servir de exhortación a la paciencia para consolarnos de nuestra falibilidad.

Por el contrario, son necesarias las reglas que permiten medir, comparar o limitar la probabilidad de ciertas hipótesis cuando se establecen resultados correspondientes a un número finito de proposiciones de observación. En este dominio, lo menos que se puede exigir es que no sea reducido a nada el conocimiento de un observador finito. Pediremos, pues, que no sea nula la probabilidad de ciertas hipótesis que han recibido un número finito de verificaciones. Entre ellas, deberán figurar leyes universales, a menos que se esté en condiciones de establecer que el conocimiento experimental puede constituirse sin que se haga uso de leyes de este tipo. Esta exigen-

[25] La primera cláusula excluye el caso en que la probabilidad, ya igual a 1, no puede crecer más; la segunda aquél en que la ley sería lógicamente falsa o ya invalidada por los hechos.

cia se expresará así: Para ciertas parejas de fórmulas de la parte probabilizada de un lenguaje, se debe tener $p(h, e) > 0$, siendo satisfactorias las condiciones siguientes: h y e no es lógicamente falso, e es una conjunción finita de proposiciones de observación o una fórmula lógicamente verdadera, h una "ley universal", es decir, una fórmula universal no lógicamente verdadera. Renunciar a este principio resultaría condenar al observador humano a la ignorancia después de haber prometido la omnisciencia al observador infinito.

Seguidamente, procede imponer a las funciones de probabilidad ciertas condiciones de simetría más o menos bien justificadas por una apelación al principio de indiferencia. Pero es difícil precisar cuáles son sin especificar la naturaleza del lenguaje. Por eso debemos recurrir a un ejemplo. Siendo P y Q predicados monádicos de observación, se trata de determinar la probabilidad de la ley $(x)(Px \supset Qx)$, cuyo nombre es h. Dos protocolos de observación e_1 y e_2 nos enseñan respectivamente dos objetos distintos, cuyos nombres son a y b, que poseen las propiedades P y Q. Parece conforme a la razón suponer que $p(h, e_1) = p(h, e_2)$, dado que nada distingue a esos objetos, puesto que no sabemos nada del uno que no sepamos del otro. Para cada segmento de lógica inductiva que se constituya, será preciso enumerar exhaustivamente los principios de ese tipo que restringen notablemente la elección de las funciones de probabilidad.

Quedaría por utilizar un último principio intuitivamente evidente, que sería el siguiente: "De dos hipótesis, es la más probable la que da cuenta del mayor número de hechos, siendo lo demás igual". Lo que se expresará formalmente así: e_1 y e_2 son conjunciones finitas de proposiciones de observación y $e_2 \vdash e_1$, h y e_2 y h' y e_2 no son lógicamente falsos; se tiene $h \vdash e_1$ y $h' \vdash e_1$ pero no $h \vdash e_2$; por el contrario, $h' \vdash e_2$. En esas condiciones, para todas las parejas de fórmulas probabilizadas, se tendrá $p(h, e_2) < p(h', e_2)$. Pero todavía sería preciso tener en cuenta la restricción "siendo lo demás igual", que tiende, por ejemplo, a excluir el caso en que una de las hipótesis fuera manifiestamente menos simple que la otra. Es posible que, en ciertos casos privilegiados, se sepa resolver ese problema de manera satisfactoria. Así ocurrirá cuando las hipótesis h y h' puedan obtenerse la una a partir de la otra, por permutación de constantes de un tipo determinado; se tiene entonces derecho a afirmar que la cláusula restrictiva está satisfecha. Ese principio no puede, pues, enunciarse bajo una forma precisa más que si se especifican los usos que se hacen de él.

Tales son los principios sobre los cuales debe edificarse una lógica inductiva probabilitaria. De una función de confirmación que no cumpla esas condiciones, se puede decir que no expresa adecuadamente la idea que nos hacemos de la probabilidad inductiva; de ahí el nombre de condiciones materiales de adecuación dado a estos principios[26]. La exigencia de atenerse a principios intuitivamente evidentes y formalmente expresables ha restringido su número. El conjunto es de una pobreza

[26] "Condiciones materiales", por oposición a las condiciones formales que constituyen los axiomas de la teoría de probabilidades.

manifiesta y es de temer que su fuerza resulte desproporcionada con respecto a lo que se espera de ellos. Sin embargo, no es preciso conservar ninguna ilusión: todo principio que se le añadiera sería fácilmente refutable y su introducción debería ser cuidadosamente legitimada. Como vamos a ver, es una de las razones que exigen que se resuelva el problema de la justificación de la inducción, por grande que sea, en ciertos autores, el deseo de eludirlo.

3. Análisis formal y justificación de la inducción.

Supongamos edificado un sistema de lógica inductiva. ¿Se puede limitar a eso la tarea de la epistemología, se puede reducir toda la filosofía de la inducción a un simple análisis formal del pensamiento inductivo, a la sola construcción de un sistema de lógica inductiva? Es lo que han afirmado algunos autores: la epistemología tendría por única función proporcionar una "reconstrucción racional" de los métodos inductivos cuya validez está reconocida por todas las mentes sanas, codificar los principios sobre los que reposan. Por "reconstrucción racional" sería preciso entender no una simple descripción de esos métodos sino la determinación de un "sustituto lógico"[27], no su representación con todas sus ambigüedades, sino una sistematización que supone la explicación de los conceptos y de los principios que utilizan y que no excluye la posibilidad de una crítica[28]. No hay ninguna necesidad de justificar los principios que los fundan. Los problemas que se plantean al respecto serían seudo-problemas.

Pero si se erige así el uso científico en norma de legitimidad, aún es necesario asegurarse de que la lógica inductiva constituye un análisis pertinente de los métodos inductivos que son objeto del consenso de los sabios. Al decidir librarse a un análisis exclusivamente formal del pensamiento inductivo, se ha tomado un partido que es preciso legitimar. Nada prueba que no se esté privado de medios de describir los procedimientos puestos en juego en la construcción de las ciencias experimentales. Así, en la estimación de una probabilidad, la exclusión de todos los factores que no son susceptibles de una definición formal es un procedimiento que no es evidente. ¿Cómo juzgar acerca de la pertinencia de un análisis y de la capacitación de la lógica inductiva para aportar un fundamento al conocimiento experimental? Se puede decir, por ejemplo, que la lógica inductiva fracasaría si llevara, en ciertos casos, a atribuir la probabilidad más elevada a una hipótesis distinta de la que se obtendría según los cánones del pensamiento científico. Sin embargo, es difícil de apreciar la suficiencia de los sistemas efectivamente constituidos en la medida en que se presentan como trabajos preparatorios: entre una descripción sumaria e insuficiente y una descripción errónea la salida es difícil.

---

[27] La expresión es de **Reichenbach** (Cf. *E.P.*, § 1, p. 5).

[28] En estos términos describe **Carnap** el ideal de reconstrucción racional. (Cf. *L.F.P.*, § 110, pp. 576-577.)

No se ha conseguido, pues, en modo alguno, que la lógica inductiva constituya una descripción pertinente de los pasos del pensamiento científico. Pero, incluso cuando ocurriera de otra forma, eso no significa que tenga vocación de fundamentar el conocimiento experimental. Si se quiere que la lógica inductiva constituya una descripción suficientemente fina del pensamiento inductivo, es preciso que permita la apreciación de un gran número de probabilidades. Será necesario, entonces, darle como base un conjunto de principios mucho más numerosos que los que hemos enumerado precedentemente. Figurarán necesariamente entre ellos principios que no pueden aspirar a la evidencia inmediata. Es decir, no se podría invocar la evidencia de los principios sobre los que descansa para negarse a plantear el problema de la justificación de una lógica inductiva. Argüir el hecho de que el hombre de ciencia le otorga su confianza es un mal argumento, pues es precisamente lo bien fundado de esta confianza lo que está en cuestión y no se podría confundir la evidencia con el consenso de los sabios. En cuanto a la analogía con la lógica deductiva, a menudo puesta por delante, no prueba nada: contrariamente a lo que se pretende algunas veces, esta disciplina no se contenta con codificar los tipos de demostraciones admitidos corrientemente, los legitima de modo efectivo mediante las pruebas de validez, logradas ellas mismas por las vías de una lógica natural cuya evidencia escapa a toda discusión.

En resumen, una de las dos cosas: O bien, descansando sobre los meros principios que garantiza la evidencia, serán las lógicas inductivas sistemas muy débiles que no podrán ni justificar, ni siquiera describir y codificar, la mayoría de los métodos utilizados en la construcción del saber experimental. O bien serán suficientemente fuertes, pero tendrán por base principios de ningún modo evidentes que, en consecuencia, requieren justificación.

Pero hay otra manera de poner en evidencia el carácter inevitable del problema de la justificación de la inducción y mostrar bajo qué forma se vuelve a encontrarlo: radica en el estudio de la significación otorgada al concepto de probabilidad inductiva.

La lógica inductiva probabilitaria permite atribuir una probabilidad determinada a ciertas hipótesis o establecer un orden de probabilidad entre las hipótesis. Pero, ¿qué significa "probable" en enunciados del tipo de "h tiene la probabilidad p", o "h es más probable que h'?" En una primera aproximación, se puede decir que las respuestas aportadas a esta pregunta se clasifican en dos grupos. O bien se pretende que la noción de probabilidad inductiva es un concepto lógico, o, para ser más exacto, un concepto metalógico; o bien se sostiene que ese concepto debe recibir una definición coordinativa, es decir, que un enunciado de probabilidad concerniente a las fórmulas de un lenguaje determinado es equivalente a ciertas fórmulas de ese lenguaje. De hecho, esta distinción sumaria permite oponer dos tipos de lógicas inductivas que vuelven a encontrar, de manera diferente, el problema de la justificación de la inducción.

Keynes y **Carnap** son los autores que han defendido con más brillantez el primer

tipo de respuesta. Afirmar que la probabilidad inductiva es un concepto metalógico no es sostener que todos los enunciados de probabilidad pertenecen al análisis formal del lenguaje. Por el contrario, **Carnap** distingue explícitamente dos tipos de probabilidad[29]. Un enunciado como "la probabilidad de que salga cruz al tirar esta moneda es 1/2" pertenece al lenguaje objeto que sirve para la descripción de los fenómenos naturales. El concepto de probabilidad que figura en él es susceptible de una definición coordinativa (en términos de frecuencias). Pero otra cosa sería el concepto de probabilidad que aparece cuando se habla de la probabilidad de una hipótesis científica, ese concepto que hemos calificado de inductivo. No susceptible de una transcripción en el lenguaje-objeto, un enunciado de probabilidad inductiva pertenece a la metalengua y la palabra probabilidad que en él figura ha de clasificarse en el mismo grupo que palabras como verdad, implicación o consecuencia. En pleno rigor, la probabilidad inductiva es una función numérica (o un orden) definida sobre conjuntos de fórmulas o de parejas de fórmulas de ciertos sistemas semánticos determinados. La única relación entre esos dos conceptos de probabilidad, que legitima su homonimia, explicable por otra parte por el hecho de que se los ha confundido durante largo tiempo, radica en que los dos conceptos tienen propiedades formales idénticas; en otros términos, satisfacen los mismos axiomas.

La ventaja evidente de esta concepción se basa en el hecho de que no se podría prohibir al lógico definir libremente un concepto metalógico de probabilidad. Su elección no hay que justificarla en modo alguno. A lo sumo, se puede pretender que se resalte su carácter fecundo y que se pruebe que está en consonancia con ciertos usos establecidos, o que, si se aleja de ellos, es por razones aceptables. En esas condiciones, el hecho de que resulte de ciertas condiciones establecidas de modo decisorio basta para legitimar la atribución de un grado de probabilidad determinada a tal o cual hipótesis. ¿Quiere decir esto que no se plantea el problema de la justificación de una lógica inductiva en la que el concepto de probabilidad esté interpretado así? Sin ninguna duda, es preciso responder afirmativamente si se considera la lógica inductiva como un simple desarrollo formal. Pero ocurre de modo diferente si se quiere utilizar esta lógica de tal manera que funde el conocimiento experimental, o incluso codifique prácticas admitidas.

El uso científico propugna que una hipótesis muy probable, en el sentido inductivo del término, sea tenida por verdadera e integrada en el cuerpo de los enunciados admitidos, o que, de dos hipótesis, se mantenga la más probable. En suma, implica el empleo de reglas que autorizan la aserción de ciertos enunciados en virtud de los resultados de la estimación intuitiva de su probabilidad. Para que una lógica inductiva del tipo de las que acabamos de describir juegue un papel en una teoría del conocimiento experimental, para que no sea un sistema vacío, será necesario añadir reglas de este tipo. Lo que serán exactamente esas reglas no podemos decirlo desde

[29] El título del primer artículo consagrado a la lógica inductiva que publicó es significativo: *The two concepts of probability*.

ahora. Pero admitamos, por ejemplo, que haya una regla autorizando la aserción de las hipótesis de probabilidad elevada, es decir, de probabilidad superior a un umbral determinado. Es claro que habrá que justificar esas reglas. Será preciso mostrar que es conforme a la razón o ventajoso (en sentidos de estos términos que quedan por determinar) mantener las de fuerte probabilidad y únicamente ésas. El hecho es que los autores que adoptan una definición metalógica de la probabilidad inductiva acaban siempre por tratar tales problemas, conscientes de la insuficiencia de un análisis estrictamente formal.

En suma, se puede constituir una lógica inductiva probabilitaria de tal manera que en el interior del sistema no se plantee el problema de la justificación de la inducción. Basta, para ello, con adoptar una definición puramente metalógica de la probabilidad inductiva. Pero el sistema constituido no aporta ningún fundamento al conocimiento experimental en tanto que no se le añadan reglas metodológicas que determinen el uso que se puede hacer de los enunciados de probabilidad. En ese momento, se planteará el problema de la justificación de la inducción que se presentará bajo la forma del problema de la justificación de las reglas de aplicación que se hayan mantenido. No se puede dudar de que haya ventajas en concederse el campo libre para constituir un sistema formal y rechazar el problema de la justificación de la inducción. Pero esto no significa en abosoluto que ese problema no se planteará jamás.

Muy distinta será la situación si se decide que la noción de probabilidad inductiva no es exclusivamente metalógica. Una doctrina tal, que es la de **Reichenbach**, lleva a sostener que un enunciado de probabilidad inductiva concerniente a una fórmula es traducible en un conjunto de enunciados que pertenecen al mismo lenguaje que esta fórmula. Además, se acabará considerando que la formulación metalógica no es más que una formulación derivada y que el sentido fundamental de los enunciados de probabilidad inductiva viene dada por su interpretación en el lenguaje-objeto. En esas condiciones, el problema de la justificación se planteará bajo una forma distinta, desde el principio de la elaboración de un sistema formal.

Dado que la aserción de la probabilidad de una hipótesis es equivalente a la aserción de ciertos enunciados del lenguaje-objeto, será preciso establecer la validez de las condiciones formales impuestas al concepto de probabilidad. En otros términos, se deberá probar que los axiomas de la probabilidad —o al menos los que se haya mantenido— son tautologías en la interpretación considerada. Así se restringe la libertad en la construcción del sistema formal, o más exactamente, en la elección de las interpretaciones de los enunciados de probabilidad inductiva. Al mismo tiempo, el contenido de la lógica inductiva será tal que volverá a autorizar, cuando se establezca la verdad de ciertas fórmulas, la aserción de otras fórmulas que no se concluyen de ellas. No procederá distinguir una lógica inductiva y una metodología que fije las reglas de utilización de los enunciados de probabilidad; esas dos disciplinas se confunden y el problema de la justificación de la inducción se plantea de golpe.

No es cierto, por tanto, que una lógica inductiva tenga buen éxito en su tarea dé

codificación de los métodos puestos en juego en la elaboración del conocimiento experimental. De todas formas, la obtención de ese fin no podría dispensar de una investigación que apunte a justificar el conocimiento experimental. A lo sumo se puede esperar que, al plantear netamente las cuestiones que conciernen a la inferencia inductiva, la lógica inductiva elimine ciertos seudo-problemas e indique la vía de una solución. Pero está fuera de discusión que el problema de la justificación de la inducción se plantea de forma diferente según se tenga al concepto metalógico de probabilidad por primitivo o por derivado. En el segundo caso, son los principios de la lógica inductiva los que habrá que justificar; en el primero, las reglas que determinan el uso de las probabilidades. Esta diferencia es suficientemente profunda para justificar el curso que tomará la continuación de nuestro estudio.

Examinaremos sucesivamente los principales sistemas que se han constituido a partir de una u otra de esas dos concepciones. En cada caso, nos preguntaremos si aportan una descripción satisfactoria de los pasos del pensamiento inductivo y, dado que la construcción de las lógicas inductivas probabilitarias respondé a la intención, a menudo manifiesta, algunas veces oculta, de aportar una justificación del conocimiento experimental, no nos olvidaremos de investigar si ese fin es alcanzado.

Comenzaremos por el examen de la doctrina de **Reichenbach**, que es el más complejo de los sistemas fundados sobre una interpretación objetiva de la probabilidad inductiva. El respeto a la cronología no es el único motivo que determina la elección de ese orden. Esta doctrina, de una brutal simplicidad, es presentada por su autor como plenamente satisfactoria. Entendamos que **Reichenbach** se enorgullece de determinar la probabilidad de cualquier hipótesis científica y de justificar perfectamente las reglas que fundan esa determinación. Por otra parte, los propósitos filosóficos que dan un sentido a su empresa aparecen netamente. Por eso es bueno partir del estudio de un pensamiento tan ejemplar.

SEGUNDA PARTE

Inducción, probabilidades y frecuencias según Reichenbach

CAPITULO V

FRECUENCIAS Y PROBABILIDADES

Si pretende ser completa, toda epistemología debe incluir un análisis del conocimiento inductivo. Pero, como hemos visto, la ausencia de una teoría de la inducción tiene las consecuencias más ruinosas justamente en las epistemologías de inspiración positivista. Consciente de este hecho, **Reichenbach** no vacila en anunciar su quiebra definitiva en el caso en que se demostraran incapaces de justificar la inferencia inductiva. Al mismo tiempo, afirmaba que era posible evitar esas dificultades: para alcanzar ese resultado, bastaría con desarrollar la teoría positivista del conocimiento bajo la forma de un empirismo probabilitario. Las dificultades se desvanecerían desde el instante en que se estimaran como simplemente probables los enunciados inducidos. Por otra parte, los problemas concernientes a la significación y a la validez de las proposiciones que constituyen el conocimiento experimental no son los únicos en recibir así una respuesta. Las cuestiones relativas a las relaciones entre los sense-data y el universo físico, a las relaciones entre el lenguaje fisicalista y el lenguaje psicologista, al estatuto de las entidades abstractas, se han resuelto imperfectamente durante tanto tiempo como ha dejado de incluirse el punto de vista probabilitario en la investigación. Bastaría, por ejemplo, con considerar que no hay equivalencia lógica sino implicación probable entre enunciados que atañen a los sense-data y enunciados que atañen a los objetos exteriores para constituir una doctrina coherente que evitara estimar el problema de la realidad del mundo exterior como una seudo-cuestión y comprometer al neo-positivismo con el idealismo de **Berkeley**. En suma, según **Reichenbach**, la teoría del conocimiento probable y, más especialmente, la lógica inductiva probabilitaria deben aportar al empirismo lógico la ampliación necesaria para su supervivencia.

Pero, ¿es acaso fácil constituir una doctrina del conocimiento probable conforme a los cánones de la epistemología positivista? ¿Era solamente el prestigio del ideal cartesiano de certeza el que encerraba al positivismo en un dogmatismo insostenible? Se podría dudar de ello si se recuerdan los motivos que permitían a **Comte** reprobar el uso científico del cálculo de probabilidades[1]. Concediendo que las teorías analíticas de las que ha sido ocasión el cálculo de probabilidades tienen un valor indiscutible, **Comte** se pronuncia de todas formas por una condena radical de él, pues "es la noción fundamental de probabilidad evaluada la que parece directa-

[1] Cf. *C.P.P.*, lección 27ª, T. 2, p. 255.

mente irracional e incluso sofística". La prueba de ello es que "ha llevado a rechazar como numéricamente inverosímiles sucesos que, sin embargo, van a cumplirse". De ahí lo impropio del cálculo de probabilidades para reglamentar nuestro comportamiento. Se ve qué es lo que plantea problema al pensamiento positivista: Excluidos los casos límites, un enunciado de probabilidad no podría ser ni verificado ni invalidado por la experiencia; no se le puede dar un contenido empírico sino recurriendo a un principio sospechoso. A no ser que se lo tenga por estrictamente formal, en cuyo caso no se sabría qué uso hacer de él, no puede ser integrado en una teoría del saber positivo y debe ser considerado como desprovisto de significación.

Lejos de ignorar estas objeciones, aun cuando es menos exigente que **Comte**, **Reichenbach** les atribuye una importancia considerable. Está de acuerdo con que los enunciados de probabilidad no tendrían ningún contenido empírico y no serían utilizables en el conocimiento experimental si no fueran verificables. Se tome en consideración el concepto matemático de probabilidad o la noción de probabilidad inductiva, el problema es el mismo. Tanto en un caso como en el otro, si se quiere evitar constituir una teoría sin uso, es necesario dar una definición *coordinativa* de la probabilidad[2]. Entendamos por eso una definición que coordina el concepto de probabilidad con términos del lenguaje de observación, de tal manera que las aserciones de probabilidad sean equivalentes a proposiciones de observación. De este modo, **Reichenbach** condena las tentativas que se han hecho para constituir una lógica inductiva a partir de una concepción puramente formal de la probabilidad inductiva. En una perspectiva semejante, que es la de **Carnap**, los enunciados de probabilidad "son vacíos en tanto que están en cuestión predicciones" y la probabilidad no tendrá nada que ver con la seguridad de las predicciones[3]. Puesto que convierten en inverificables los enunciados de probabilidad, las doctrinas de este tipo no pueden servir para fundamentar el conocimiento inductivo.

La exigencia de dar a la teoría de probabilidades una forma tal que sus enunciados tengan un contenido empírico está, pues, plenamente reconocida por **Reichenbach**. Pero, según este autor, existiría una definición de la probabilidad que responde a esos requisitos y hace vanas las objecciones de **Comte**. Los autores que han constituido la teoría del colectivo se han esforzado por acuñarla. En efecto, algunos matemáticos, conscientes de las dificultades que encuentra la aplicación del cálculo de probabilidades si se lo mantiene en las posiciones clásicas, han propuesto una nueva definición de probabilidad. Para ser operante, esta definición, que identifica probabilidad y frecuencia-límite en una serie infinita, debe acompañarse de una reforma del instrumento formal. Es así como von **Mises** ha creado la teoría del colectivo, que permite tratar esas probabilidades confundidas con frecuencias-limites.

Para construir una lógica probabilitaria de la inducción, interesaría partir de esta

[2] Cf. *P.S.T.*, cap. 1, § 4, p. 14 y sig., donde se introduce el concepto de definición coordinativa.

[3] T.P., § 71, p. 371; cf. igualmente § 89, pp. 459-460, *E.P.*, § 8, pp. 76-78, § 38, p. 338.

nueva teoría científica. Se impondría así la identificación de la probabilidad inductiva con la probabilidad matemática, identificada ella misma con una frecuencia-límite. La construcción del empirismo probabilitario sería, por tanto, estrechamente dependiente de la aparición de una nueva teoría científica. Estaría ahí una confirmación de la tesis según la cual la solución de los problemas filosóficos depende del progreso de los conocimientos positivos.

¿Quiere decir esto que la teoría del colectivo, que apareció en la literatura matemática hacia los años 1930, constituye por sí misma una lógica de la inducción? No exactamente. Como hemos dicho, los autores que la han creado han querido principalmente dar un rodeo a ciertos obstáculos concernientes a la aplicación del concepto matemático de probabilidad al conocimiento experimental. No se han preocupado por la probabilidad inductiva. Por eso su obra es limitada. Asimismo, es técnicamente imperfecta. Siguiendo los usos del "working mathematician", no han recurrido apenas a la formalización y se han contentado con definiciones insuficientes. Mientras daban una definición coordinativa del concepto de probabilidad, no se han ocupado de saber si los principios de su teoría eran tautologías, conforme a las exigencias de la doctrina positivista del conocimiento, y, sobre todo, han dejado pendiente un problema que, sin embargo, era esencial en su perspectiva: ese problema atañe a las condiciones en las que se permite la aserción de un enunciado de probabilidad. Desdeñando el hecho de que disponemos únicamente de un número finito de observaciones en tanto que una probabilidad es una frecuencia-límite en una serie infinita, no han acentuado la necesidad de una regla de un tipo particular que permita el paso de lo finito a lo infinito. En suma, queda por realizar una transformación de la teoría del colectivo. Se trata, a la vez, de un trabajo de configuración, destinado a resolver el problema del fundamento lógico de esta teoría, de acabado de su adquisición, de ampliación de su alcance. De todas formas, se mantiene el hecho de que la teoría del colectivo lleva en germen la lógica inductiva probabilitaria. No sólo es la única doctrina que conduce a un tratamiento satisfactorio del concepto de probabilidad, en el sentido de que resuelve los problemas concernientes a su uso empírico, sino que además abre el camino a la constitución de una lógica inductiva. Si ocurre así, es porque, en realidad, por razones que expondremos más adelante, el problema de la aplicación del cálculo de probabilidades constituye el meollo del problema de la inducción.

Interesa, pues, comenzar nuestro análisis de la doctrina de **Reichenbach** por el estudio de la teoría del colectivo. La definición frecuencial de la probabilidad exige una transformación del instrumento formal si se quiere sacar partido de ella. En el caso en que la adopción de esta nueva definición de la probabilidad llevara a dificultades insuperables en el plano formal –y así sucederá– la teoría de **Reichenbach** sufriría, de golpe, un detrimento considerable.

1. Las dificultades de la teoría de la probabilidad de Laplace

La teoría de **Laplace** no está más axiomatizada que cualquier otro desarrollo que date de la misma época. De todas formas, ocurre que no lleva a ninguna contradic-

ción en tanto que no plantea sino problemas estrictamente matemáticos y se le puede dar una forma que satisface las exigencias de rigor del matemático contemporáneo. La axiomatización del cálculo de probabilidades propuesta por **Kolmogorov** no es más que la traducción a un lenguaje riguroso de los principios sobre los que **Laplace** fundaba la teoría matemática de probabilidades; de ahí el nombre de teoría neo-clásica que se le atribuye a menudo. Pero las dificultades surgen cuando se trata de aplicar la teoría de **Laplace**. Esas dificultades conciernen a la determinación de los datos numéricos de probabilidad, la interpretación empírica y la verificación de los enunciados de probabilidad. Parece que resultan de una definición insuficiente de probabilidad. Ciertamente, considerada como una noción formal, la probabilidad recibe una definición satisfactoria desde el instante en que se formulan claramente los axiomas a los cuales se somete. La introducción de las estructuras de álgebras probabilizadas en la matemática formal, la identificación de la probabilidad con una medida totalmente finita sobre un álgebra de **Boole** (o un álgebra σ), dan a la exposición formal todo el rigor deseable. Pero no contribuyen en absoluto a resolver los problemas de aplicación que hemos señalado. Cuando se abordan estas cuestiones, se hace sentir cruelmente la ausencia de una definición coordinativa en la tradición laplaciana.

Se buscaría en vano una definición neta de probabilidad en la obra de **Laplace**. Se sabe que la publicación del *Essai philosophique sur les probabilités* fue, para **Laplace**, la ocasión de hacer profesión de fe determinista. Estando todo determinado, la probabilidad no puede ser la propiedad del suceso; será, por tanto, una magnitud que depende del estado de conocimiento de un sujeto particular. Siempre es relativa, en parte a nuestra ignorancia, en parte a nuestro conocimiento[4]. Mide nuestra creencia en la producción de un suceso. Por eso los autores que han definido la probabilidad como la medida de un grado de creencia racional han sido fieles a la perspectiva de **Laplace**. Esta concepción subjetiva de la probabilidad es ya inquietante en sí misma, pues no se ve ni cómo verificar un enunciado de probabilidad si no es por un tipo de medida que depende de las técnicas psicológicas, dado que el grado de creencia es un fenómeno psicológico, ni cómo utilizar las determinaciones de probabilidades en una ciencia empírica que pretende aportar un conocimiento de los objetos y no de los estados mentales de un sujeto determinado.

Pero es mucho más inquietante la definición de probabilidad en términos de equiprobabilidad a la que **Laplace** se refiere sin cesar. Medir la probabilidad de un suceso por la relación del número de casos favorables a su producción con el número total de casos, supuestos todos los casos como equiprobables, es un método discutible. Se ha protestado contra este método bajo pretexto de que la derivación del concepto de probabilidad a partir del concepto de equiprobabilidad constituye un círculo vicioso. No es ése el problema, pues es fácil oponer que toda magnitud física se define indicando los procedimientos operatorios que permiten dar un sentido a las ideas de igualdad y de suma de dos magnitudes. Lo que es discutible, en el

[4] *E.P.P.*, p. 8.

uso laplaciano, es la remisión a situaciones en las que es posible determinar sucesos equiprobables.

En efecto, para determinar la equiprobabilidad de ciertos sucesos, no hay otro procedimiento sino el empleo del principio de indiferencia que es efectivamente utilizado por **Laplace**. Se concibe fácilmente que este principio haya sido discutido. Vuelve a introducir el principio de razón suficiente bajo una forma negativa de la que se puede preguntar si no es contradictoria. Se supone que existen sucesos tales que no hay ninguna razón para que uno se produzca más bien que el otro, lo cual es negar el principio de razón. Pero hay que añadir que esos sucesos deben ser tenidos por equiprobables, dado que ninguna razón podría dar cuenta de la diferencia de sus probabilidades; lo que vuelve a suponer que nada es sin razón. Por otra parte, cualesquiera que sean esas dificultades que conciernen al "fundamento metafísico" del principio de indiferencia, es claro que su uso debe restringirse estrictamente. Incluso si se admite que se tiene derecho a concluir la equiprobabilidad de sucesos acerca de los que se sabe que ninguna razón puede favorecer la producción de uno de ellos en detrimento de los otros, no se puede admitir el razonamiento que consiste en pasar de la ignorancia a la equiprobabilidad y en estimar sucesos como equiprobables simplemente porque no se discierne ninguna razón que justifique esperar la producción de uno más bien que la de otro. Se comprende la indignación que ha suscitado un paso de ese tipo y von **Mises** le opone el axioma "ex nihilo, nihil" para afirmar que no se podría concluir nada de una ignorancia[5]. De todos modos, como hemos visto anteriormente[6], un uso del principio de indiferencia que no estuviera estrictamente limitado engendraría antinomias.

El principio de indiferencia es, por tanto, insuficiente para determinar los grados de probabilidad de los que hace uso el conocimiento científico. De todas maneras, aun cuando ocurriera de otra forma, serviría para medir las probabilidades, no para dar un contenido empírico a las aserciones de probabilidad. Otro principio es, pues, necesario si se quiere que la teoría de las probabilidades sea aplicable en el conocimiento empírico. Se ha creído encontrarlo en un enunciado, siempre utilizado, y al que la tradición quiere que se le asocie el nombre de **Cournot**. La formulación más simple que se puede dar de él es la siguiente: un suceso cuya probabilidad es muy débil no se producirá. Para precisar ese principio, se podrá fijar un umbral por debajo del cual las probabilidades se estimarán como desdeñables. Diversas consideraciones, parecidas a las avanzadas por **Borel**, pueden ayudar a determinar ese umbral según la naturaleza de los sucesos en cuestión. De este modo, algunos enunciados de probabilidades reciben una significación empírica. Son los que conciernen a probabilidades desdeñables.

Pero, ¿qué sucede con los otros? En ciertas condiciones, es posible derivar, de un enunciado concerniente a una probabilidad no desdeñable, otro enunciado concer-

---

[5] *P.S.T.*, 2.ª lectura.
[6] Cf. capítulo 3.

niente a una probabilidad desdeñable. Ello ocurre cuando puede aplicarse el teorema de **Bernouilli**, o una de sus extensiones. Al suponer constante la probabilidad en una serie de pruebas, siendo las pruebas independientes las unas de las otras, se puede concluir, si la serie es suficientemente larga, que hay una probabilidad desdeñable de que la frecuencia de aparición del suceso difiera de su probabilidad en una cantidad mayor que una cantidad dada. Más exactamente, sea p la probabilidad de un suceso, f_n su frecuencia en una serie de n pruebas, δ un número comprendido entre 0 y 1, ϵ un umbral por debajo del cual las probabilidades se estiman como despreciables; se puede calcular n de tal manera que la probabilidad de que se tenga $|p - f_n| > \delta$ sea inferior a ϵ, o, fijando n, determinar δ de tal suerte que se satisfaga esa condición. Así, a partir de todo enunciado de probabilidad, a reserva de que se satisfagan[7] ciertas condiciones, se pueden derivar otros enunciados a los cuales confiere un contenido empírico el principio de **Cournot.**

Desde entonces, se puede pensar en determinar las probabilidades a partir de los recuentos de frecuencias. Pero, en esta materia, la apelación al principio de **Cournot** es ineficaz. El teorema de **Bernouilli** autoriza la derivación de una frecuencia a partir de una probabilidad, y no la derivación inversa. En realidad, su inversión exige la introducción de una distribución *a priori* de las probabilidades y el uso de un esquema bayesiano, como hemos visto. Apelar al principio de indiferencia para determinar esta distribución *a priori* de las probabilidades es un uso especialmente discutible de este principio. Por supuesto, se puede hacer notar que la naturaleza de la distribución *a priori* no tiene apenas importancia desde el momento en que se satisfacen ciertas condiciones, a reserva de que la frecuencia se mida sobre una serie suficientemente larga. Pero si esta observación es suficiente para la práctica, no brinda ningún fundamento teórico sólido para la medida de las probabilidades a partir de los recuentos de frecuencias.

En resumen, el problema de la aplicación del cálculo de probabilidades encuentra de nuevo dificultades si se parte de las formulaciones clásicas. Si existen usos legítimos del principio de indiferencia, son estrictamente limitados e insuficientes para permitir la determinación de la mayor parte de las probabilidades. En cuanto a la medida de las probabilidades a partir de las frecuencias, exigiría, para estar fundada en razón, una aplicación del principio de indiferencia que difícilmente puede mantenerse. Por otra parte, por lo que atañe al contenido empírico de los enunciados de probabilidad, el principio de **Cournot** resuelve el problema en lo que concierne a las probabilidades desdeñables. En cuanto a las otras, reciben una significación indirecta en la medida en que se pueden concluir de ellas enunciados concernientes a probabilidades desdeñables. ¿Quiere decir esto que este principio, rechazado explícitamente por **Comte**, no tenga defectos? Nada de eso. En ciertos casos, el principio de **Cournot** pide que se tengan por imposibles sucesos de probabilidad desdeñable cuando se está seguro de que alguno de ellos se producirá. Para convencerse de ello,

[7] En la medida en que se disponga de resultados más fuertes que el teorema de **Bernouilli**, las condiciones que acabamos de enunciar en este párrafo pueden ser debilitadas.

basta con tomar en consideración una familia completa de sucesos, todos ellos con probabilidad desdeñable, lo que es posible desde el momento en que se ha fijado el umbral por debajo del cual las probabilidades se estimarán como desdeñables. Así se pone en evidencia el hecho de que el principio de **Cournot** lleva a contradecir las reglas de la lógica bivalente[8].

Las dificultades que acabamos de señalar no dependen en modo alguno de las formulaciones que **Laplace** había mantenido para exponer la teoría de probabilidades. Las volveríamos a encontrar en toda doctrina que se fundara sobre el concepto clásico de probabilidad. Unicamente el sistema de **Fisher** se puede considerar que escapa de ellas. Ciertos procedimientos de la teoría de la inferencia estadística permiten evitar el recurso al principio de indiferencia, pero es en la medida en que, por ejemplo, las determinaciones de probabilidad se presentan como simples hipótesis a contrastar. De todos modos, no podrían dispensar del recurso al principio de **Cournot.**

La paradoja de la teoría clásica es que, en las aplicaciones, debe apelar a medidas de frecuencias para determinar probabilidades o para dar un contenido empírico a los enunciados de probabilidad. Pero es incapaz de justificar rigurosamente ese recurso a las frecuencias.

2. La teoría frecuencial de la probabilidad

La medida de las frecuencias sirve para determinar ciertas probabilidades. Asimismo midiendo frecuencias es como se verifican los enunciados de probabilidad y como se les da un contenido empírico. Esos motivos hacen pensar que la noción de probabilidad se reduce al concepto de frecuencia sin que se tenga que apelar al análisis del contenido psicológico de los juicios de probabilidad. El argumento, muy a menudo invocado[9], según el cual la probabilidad se reduciría a una frecuencia, dado que nos representamos frecuencias cuando hablamos de probabilidades, no podría concluir. Una teoría coherente de la significación impide definir el sentido de un concepto a partir del contenido de pensamiento presente cuando se lo utiliza, lo que sería confundir análisis lógico y descripción psicológica. Exige que la significa-

---

[8] Esto aparece desde el momento en que se toma en consideración la interpretación "lógica" de la probabilidad. El principio de **Cournot** pide que se tenga por falsa una proposición cuya probabilidad es inferior a un umbral fijado. Sea ϵ ese umbral. Consideremos n proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$, equiprobables con $1/n \leqslant \epsilon$, constituyendo estas proposiciones una familia completa. Se tiene entonces: $\vdash \bigvee_{i=1}^{n} p_i$, pero el principio de **Cournot** exige que cada una de esas proposiciones sea tenida por falsa, de donde se concluye: $\vdash \sim \bigvee_{i=1}^{n} p_i$.

[9] Ver, por ejemplo, el artículo de **Gini** (D.): *C.M.P.*, que contiene argumentos de este tipo. Es preciso hacer notar que ni von **Mises** ni **Reichenbach** emplean ese género de argumentos.

ción de un concepto se determine por un análisis lógico de las reglas de su utilización[10]. Pero precisamente un análisis de ese tipo es el que justificaría una concepción frecuencial de la probabilidad.

Partiendo de una concepción del conocimiento de la que **Cavailles** ha mostrado que dependía de una ontología realista ingenua[11], von **Mises** plantea el problema de la definición de la probabilidad en los siguientes términos: A la vista de la naturaleza de los fenómenos a los que se aplica el cálculo de probabilidades, constituir ese cálculo de tal manera que sea una "idealización" de esos fenómenos, es decir, un esquema conceptual obtenido por abstracción a partir de ellos. La noción de probabilidad sólo se emplea para "fenómenos de masa", dice von **Mises**[12]. Atañe a "sucesos uniformes capaces de repetición"[13]. Es, pues, natural identificar la probabilidad de un suceso con su frecuencia de aparición en una serie de pruebas independientes, dado que una definición tal se aplicará en todos los casos en que la noción de probabilidad tiene sentido. Además, las frecuencias satisfacen los axiomas de probabilidad. No se excluye, por tanto, que se vuelva a encontrar el formalismo clásico a partir de una definición de la probabilidad en términos de frecuencias.

Pero, se dirá, una definición tal es inoperante, pues se habla de probabilidad no de una frecuencia en una serie finita de pruebas, sino de una frecuencia en una serie prolongada indefinidamente. Por otra parte, todos saben que la frecuencia de un suceso en una serie finita de pruebas puede diferir notablemente de su probabilidad. Será preciso, pues, modificar la definición primitiva: la probabilidad será el límite hacia el que tiende la frecuencia de un suceso en una serie de pruebas que se prolonga indefinidamente[14]. Para formalizar esta definición, representemos los diversos resultados posibles en cada prueba por un punto (o una parte) de un conjunto que se llamará el espacio de marca o el espacio representativo. Así, en el caso de la tirada de un dado, el espacio de marca comprenderá 6 puntos correspondientes a los 6 resultados posibles. Una serie infinita de pruebas se representará por una serie infinita de puntos (o de partes) del espacio de marca. Sea F una parte del espacio de marca E. La probabilidad de F será la frecuencia-límite de los elementos que pertenecen a F en la serie de los puntos de E representativos de los resultados obtenidos en una serie de pruebas[15].

Identificada con una frecuencia-límite, la probabilidad satisface los axiomas de la teoría clásica. Sin embargo, en tanto que una frecuencia, en una serie de pruebas,

---

[10] Cf. **Reichenbach**; *E. P.*, cap. 1, § 2, *passim*.
[11] *C.P.*, p. 162.
[12] *P.S.T.*, 1.ª lectura.
[13] *T.P.*, § 1.
[14] La definición de la probabilidad como frecuencia límite se encuentra ya, en realidad, en **Boole** (*I.L.T.*, cap. 19, § 2, pp. 195-296).
[15] Hagamos notar que el lenguaje adoptado es equivalente a la terminología de las álgebras de sucesos hoy en curso.

está siempre definida, no ocurre lo mismo con una frecuencia-límite. Para tener derecho a hablar de la probabilidad de una parte F de E, será preciso suponer que, en la serie de los puntos representativos, la frecuencia de los que pertenecen a F converge[16]. Tal es el enunciado del principio conocido con el nombre de axioma de convergencia. Nada asegura que este principio se verifique siempre; entendámonos, que se verifique para toda serie de puntos y toda parte de E. Por ello, todos los sucesos no tendrá necesariamente una probabilidad. Pero es preciso hacer notar que las partes de E para las que se define una probabilidad por medio de una serie constituyen naturalmente un álgebra de partes[17].

La definición a la que se ha llegado es todavía insuficiente, y si nos contentáramos con ella, el cálculo de probabilidades se reduciría a algunas perogrulladas concernientes a las frecuencias. Cuando se habla de un suceso cuya probabilidad está determinada, no se intenta solamente decir con eso que su frecuencia de aparición en una serie infinita de pruebas tiende hacia un límite, sino también que los resultados se reparten irregularmente en esa serie y que no es posible preverlos conociendo su rango o los resultados que los preceden. Por esta razón, la idea de *serie de pruebas independientes* juega un papel esencial en la teoría de probabilidades y parece necesario referir la probabilidad no a una serie de pruebas, sino a cada prueba particular. Se objetará que el cálculo de probabilidades comprende un estudio de las series donde las pruebas no son independientes y cuya irregularidad está, en consecuencia, fuertemente atenuada. Las cadenas de **Markov** proporcionan el ejemplo más simple de ellas. El argumento apenas prueba: el estudio de esas series se lleva a cabo suponiendo la probabilidad variable, pero determinada en cada prueba. Para las cadenas de **Markov**, la matriz de las probabilidades de transición da las probabilidades de los sucesos que consisten en el paso de un estado a otro y la serie de las "pruebas de transición" está constituida por pruebas independientes. De todos modos, si no nos queremos limitar al enunciado de algunas propiedades aritméticas elementales, será preciso llegar a un estudio de la estructura interna de las series e imponerles ciertas condiciones de irregularidad. Sólo ese procedimiento permitirá obtener los resultados esenciales del cálculo de probabilidades, principalmente los que conciernen a las frecuencias de aparición de lo que **Ville** denomina las configuraciones de longitud y de naturaleza dadas.

La teoría frecuencial da fácilmente sentido a la idea de sucesos independientes: Siendo F y G dos partes del espacio de marca, representarán sucesos independientes

---

[16] Esta frecuencia, si existe, se designará por $f_\infty(F)$. Sólo definimos las probabilidades para las *partes* de E, pero esta definición puede extenderse al caso de los puntos de E: basta con identificar un punto de E con la parte reducida a ese único punto.

[17] Este resultado se concluye inmediatamente de propiedades muy elementales. Si se designa por $f_n(F)$ la frecuencia de los puntos que pertenecen a F en una serie de n pruebas, se tiene, para todo n: $f_n(F) + f_n(E - F) = 1$. Dado que $f_\infty(F) = \lim_{n \to \infty} f_n(F)$, si está definida $f_\infty(F)$, del mismo modo lo estará $f_\infty(E - F)$ y se tendrá $f_\infty(F) + f_\infty(E - F) = 1$. El razonamiento es idéntico para las reuniones de partes separadas.

si y sólo si $f_\infty(F \cap G) = f_\infty(F) \cdot f_\infty(G)$. Pero no ocurre lo mismo con la idea de serie de pruebas independientes. En efecto, en la teoría frecuencial, la probabilidad se define para una serie considerada globalmente y no para cada prueba en particular. Se sigue de ahí que hay alguna dificultad en hablar de pruebas independientes y en dar un contenido a la idea de una probabilidad constante de prueba a prueba. Con todo, puede evitarse el obstáculo si explicitamos, como hace von **Mises**, la idea banal que tenemos de una serie aleatoria: una serie es aleatoria y las pruebas son independientes en la medida en que no se puede prever un resultado, ni a partir de los resultados anteriores, ni a partir de su rango en la serie; además, esos conocimientos no deberán afectar a nuestras estimaciones de probabilidad.

Llamamos elección de posición a todo procedimiento que conduce a extraer, de una serie de pruebas dada, una serie parcial infinita, no utilizando para la elección de cada término sino el conocimiento de los resultados precedentes o de su rango. Hablando matemáticamente, una elección de posición relativa a un espacio de marca E es una serie de funciones $\{f_n\}$ que aplican el conjunto producido E^n en el conjunto [0, 1]. El término $n + 1$-ésimo pertenece o no a la elección de posición así definida según que el valor de la función f_n sea 1 o 0, cuando el i-ésimo argumento tiene por valor el punto representativo del resultado en la i-ésima prueba.

Demos algunos ejemplos. Sea el caso más simple, aquél en que el espacio de marca es un conjunto con dos elementos que puede, por ejemplo, representar una serie de tiradas a cara o a cruz. Decidir extraer, de una serie de resultados representables en este espacio, el 1.º, el 11.º, el 21.º, etc., es hacer una elección de posición. Esta elección se determina matemáticamente por la serie de funciones siguientes: todas las funciones f_n son funciones constantes; $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ si y sólo si $n = 1$ (mod. 10). Del mismo modo, decidiendo retener todos los términos precedidos de dos tiradas que han dado como resultado "cruz" y solamente esos, se define una elección de posición. Si el punto 1 del espacio de marca representa cruz y el punto 0, cara, esa elección se define por la serie de funciones siguientes: $f_0 = 0, f_1(x_1) = 0$, cuando $n \geqslant 2, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, si y sólo si $x_n = 1$ y $x_{n-1} = 1$. Toda combinación de reglas de este tipo sería también una elección de posición: así, se podrían retener únicamente los términos precedidos de la configuración "1, 0, 1" y cuyo rango es un número primero; eso sería también una elección de posición.

Podemos entonces formular una condición que exprese la irregularidad de una serie de pruebas: sea F una parte de E. Una serie de pruebas es un *colectivo* para F si la frecuencia de los puntos representativos de esta serie que pertenecen a F converge hacia un límite que es invariante para toda elección de posición. En este caso, se llamará *probabilidad* de F en E a la frecuencia-límite de F. Hagamos notar que la elección que consiste en retener todos los términos de la serie es una elección de posición. En consecuencia, si una serie es un colectivo para F, la frecuencia-límite de F en toda la serie parcial obtenida por una elección de posición es igual a la frecuencia de F en la serie principal. La condición que acabamos de enunciar, conocida con el nombre de *axiome of randomness*, expresa el hecho de que los colecti-

vos son tales que excluyen todo *sistema de juego,* según la expresión de von **Mises**.

Parece, pues, que se ha llegado a dar un contenido a la idea de serie irregular en términos de frecuencias y a recobrar, en la definición propuesta, todos los elementos que componen la idea de probabilidad tal como se emplea en la teoría clásica. Pero la definición propuesta, por natural que parezca, es de todas formas contradictoria. En efecto, en el número de las elecciones de posición, figuran precisamente las que sólo retienen elementos que pertenecen a F o elementos diferentes de F, sea cual sea F, a reserva, naturalmente, de que F no sea una parte vacía de E, ni una parte impropia. Es decir, no hay ahí ni colectivo ni probabilidad. Es extraño que von **Mises**, en respuesta a una objeción de M. **Frechet**, haya podido tratar de negarlo[18], pues el hecho es patente. Por supuesto, el conjunto de las elecciones de posición tiene la potencia del continuo. Entre ellas, sólo hay una que atribuye a F la probabilidad 0 y otra que le atribuye la probabilidad 1, y no se puede prescribir cuáles son sin conocer la serie. Pero el hecho es que existen. Hay por tanto, siempre un sistema de juego, incluso si lo propio de ese sistema de juego es permanecer desconocido por aquél que querría utilizarlo. No se puede permitir que se diga que la probabilidad de elegir ese sistema de juego es infinitesimal si se procede a una elección al azar entre sistemas de juego, pues se tendría derecho a preguntar qué significa aquí la expresión "probabilidad infinitesimal".

Si se quiere salvar la teoría frecuencial de la probabilidad, no hay más que un procedimiento: hacer coherente la definición de von **Mises** restringiendo la condición de irregularidad que es, de modo manifiesto, demasiado fuerte. Es lo que han hecho sus discípulos.

3. Los límites de la teoría del colectivo.

La condición de irregularidad mantenida por von **Mises** consiste en suponer que, en un colectivo, todas las frecuencias son invariantes en todas las elecciones de posición. Si se satisfaciera, se podrían volver a encontrar, en la teoría del colectivo, todos los resultados de la teoría clásica de la probabilidad. Pero se revela contradictoria. Si se suprimiera, se tendría certeza de la existencia de colectivos, pero no es menos evidente que únicamente se podría establecer un número ínfimo de resultados de la teoría clásica. Conservando la idea fundamental, que es definir la irregularidad de una serie a partir de la invarianza de las frecuencias en una elección de posición, interesa restringir el conjunto de las elecciones de posición tomadas en consideración. Este conjunto se caracterizará sea por una definición de las selecciones que pertenecen a ella, sea, más sencillamente, por su cardinal. Todo el problema es limitar el debilitamiento de la condición de irregularidad al mínimo necesario para que se pueda establecer la consistencia de la teoría, a fin de conservar, si es posible, todos los resultados de la teoría clásica.

[18] *R.F.C.*, p. 60.

Los primeros resultados positivos obtenidos en la solución de ese problema se deben a **Copeland**, quien ha establecido la existencia de series donde las frecuencias son invariantes en un conjunto particular de selecciones que es de cardinal igual al enumerable. De ahí la importancia teórica de su trabajo, que prueba la coherencia de la teoría de von **Mises** desde el momento en que se limita un poco la condición de irregularidad propuesta por él. Resultados más fuertes serán obtenidos ulteriormente por A. **Wald**, pero la obra de **Copeland** conserva, de todas formas, su importancia decisiva. Además, las técnicas empleadas por **Reichenbach** están más próximas a las de **Copeland** que a las de **Wald**[19], lo que justifica que nos interesemos por exponer los trabajos de **Copeland.**

En un artículo publicado en 1928 y titulado *Admissible numbers in the theory of probability*, **Copeland** ciñe su estudio al caso en que el espacio de marca se reduce a dos puntos (que se designarán por 0 y 1). Para las series de sucesos así representables, reserva la pintoresca denominación de historias de suceso (*event history*)[20]. Excluyamos el caso en que, a partir de cierto rango, sólo hay ceros, en cuyo caso la probabilidad de 1 es nula, sin que, por otra parte, la recíproca sea verdadera. Cada historia de suceso representa un punto del segmento [0, 1] escrito en numeración binaria y la correspondencia así establecida es una biyección. Sea $(x_n)_{x \in N}$ una historia de suceso; designemos por x el número del segmento [0, 1] que la representa y por $p(x)$ la frecuencia-límite de 1 en el desarrollo diádico de x. Llamamos $(r/k)x$ al número ligado a la serie $(x)_{r+k,\, n}$, siendo r y k enteros estrictamente positivos y recorriendo n el conjunto N. En otros términos, $(r/k)x$ designa el número cuyo desarrollo diádico se obtiene tomando los términos de k en k, a partir del r-ésimo, en el desarrollo diádico de x. El número x se denominará *admisible* si se satisfacen las siguientes condiciones:

1° $p(x)$ está definida.

2° Sean cuales sean r y k, $p((r/k)x)$ está definida y es igual a $p(x)$.

3° Los números $(1/k)x$, $(2/k)x$, ..., $(k/k)x$ son independientes.

Queda por definir la condición de independencia. En el caso de 2 números, se escribe simplemente $p(x \cdot y) = p(x) \cdot p(y)$, designado "$x \cdot y$", en la expresión precedente, el número cuyo desarrollo diádico comporta como enésimo término el producto $x_n \cdot y_n$. La expresión de la condición de independencia en el caso de n números (con $n > 2$) es un poco compleja, pero no suscita ninguna dificultad esencial.

Copeland puede establecer entonces que si $A(p)$ designa el conjunto de los nú-

[19] Por otra parte, la obra esencial de **Reichenbach:** *The Theory of Probability* no es sino una nueva versión de la obra publicada en alemán y titulada *Wahrscheinlichkeitslehre* que data de 1934 y es, por tanto, anterior a los trabajos esenciales de **Wald.**

[20] Denominación por otra parte discutible dado que, según **Cournot,** "Si no hay historia propiamente dicha allí donde los sucesos derivan necesariamente y regularmente los unos de los otros... no hay historia tampoco, en el verdadero sentido de la palabra, para una serie de sucesos que no tendrían vinculación entre ellos". (*E.F.C.*, § 313, p. 461.)

meros admisibles que definen una probabilidad p, $A(p)$ contiene al menos un punto[21]. Esta demostración, bastante laboriosa, permite después probar fácilmente que este conjunto tiene la potencia del continuo[22]. Así se obtiene un resultado importante: se asegura que la teoría del colectivo es no contradictoria si se restringe la elección de posición a un conjunto perfectamente definido que tiene la potencia del enumerable. Además, se puede demostrar que el teorema de **Bernouilli** se aplica a toda serie que represente un número admisible. Por otra parte, toda la teoría de **Copeland,** según su propia opinión, está guiada por la idea de que es preciso demostrar la existencia de series tales que la fórmula $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ dé la probabilidad de obtener m veces un suceso de probabilidad p en una serie de n pruebas.

Sin embargo, estos primeros resultados sólo tienen un campo de aplicación muy restringido. La existencia de colectivos únicamente se prueba en el caso en que el espacio de marca no contenga más que dos elementos y en que las selecciones sean de un tipo definido. Más adelante, y limitándose siempre al caso de los espacios de marca de dos puntos, **Copeland** probará la existencia de colectivos relativos a toda familia de selección cuyo cardinal no exceda al enumerable[23]. Sólo más tarde, en 1937, demostrará que su teoría puede extenderse al caso de los colectivos cuyo espacio de marca es R y donde las frecuencias consideradas son las definidas por una familia determinada de intervalos de R.[24] Pero, en esta fecha, A. **Wald** había alcanzado resultados más generales que patentizaban simultáneamente la posibilidad de constituir una teoría del colectivo coherente y los límites radicales entre los que permanece encerrada..

Para determinar en qué condiciones se puede establecer la existencia de colectivos, **Wald** ha relativizado doblemente esta noción[25]. Un colectivo se define relativamente a un conjunto determinado de selecciones y a una familia de partes del espacio de marca. Sea E el espacio de marca; $\mathscr{F}$, una familia de partes de E; $\mathscr{S}$, un sistema de selecciones que contienen la selección idéntica (es decir, la selección que retiene a todos los términos de una serie); C, una serie $(C_n)_{n \in N}$ de elementos de E. Se dirá que C es un colectivo relativamente a $\mathscr{S}$ y a $\mathscr{F}$, lo que se indica designando C por $C(\mathscr{S}, \mathscr{F})$, si se satisfacen las condiciones siguientes:

1.° Sea cual sea F, con $F \in \mathscr{F}$, está definida la frecuencia-límite de los elementos de C que pertenecen a F.

2.° Esta frecuencia es invariante para todas las selecciones de $\mathscr{S}$.

Se designará por $p(F)$ esta frecuencia-límite y se dirá que $p(F)$ es la probabilidad de F en C.

---

[21] *A.N.T.*, T. 11.
[22] *A.N.T.*, T. 12.
[23] Cf. *P.S.T.*
[24] Cf. *C.C.D.*
[25] Cf. *S.N.C.*

Wald puede establecer entonces que si el conjunto $\mathscr{S}$ es además numerable, existen colectivos relativos a $\mathscr{S}$, a reserva de que se limite, en ciertos casos, la familia $\mathscr{S}$, que no comprenderá todas las partes de E. Supongamos a E finito o enumerable. Si se define sobre $\mathscr{P}(E)$ una medida totalmente finita, se puede demostrar que existen colectivos relativos a $\mathscr{P}(E)$ y a toda familia enumerable de selecciones tales que las probabilidades de los elementos de $\mathscr{P}(E)$ sean precisamente las que les asigna la medida escogida. En cambio, si $\mathscr{S}$ es enumerable y si E tiene la potencia del continuo, no existe colectivo relativo a $\mathscr{S}$ y a $\mathscr{P}(E)$. Limitándose al caso en que E es el conjunto de los reales, J. **Ville** demuestra un teorema más preciso: no hay colectivos relativos a una familia de partes que comprendan todas las intersecciones infinitas de abiertos de R.[26] Concluye de ahí que "el campo de los sucesos probabilizables en la teoría del colectivo definida por **Wald** es más restringido que el campo de los sucesos probabilizables en la teoría clásica"[27].

Al mismo tiempo, la teoría del colectivo tropieza con otra dificultad: los colectivos tienen ciertas propiedades de probabilidad nula en teoría clásica y esto cualquiera que sea la forma dada a la condición de irregularidad[28]. En particular, J. **Ville** demuestra, en el caso particular de la alternativa, que se puede construir un colectivo donde la frecuencia tienda hacia su límite de modo unilateral (siempre por exceso, por ejemplo)[29], en tanto que una propiedad semejante es de probabilidad nula en teoría clásica. La importancia de este resultado es evidente. Prueba que se estimarán como colectivos, es decir, como irregulares, ciertas series que la teoría clásica no considera como aleatorias y que el simple buen sentido impide tener por tales.

Los resultados obtenidos por J. **Ville** muestran así, simultáneamente, las posibilidades de la teoría del colectivo y sus límites radicales. Se comprende fácilmente que su obra haya anunciado el fin de esta teoría. En efecto, aparte de los teoremas particulares que acabamos de evocar, establece de manera más general que la teoría del colectivo no puede ser no-contradictoria excepto si se restringe la condición de irregularidad de tal suerte que los colectivos posean propiedades que no corresponden a las series aleatorias de la teoría clásica. Para alcanzar ese objetivo, J. **Ville** da una nueva extensión a la noción de selección. Retomando la idea directriz de von **Mises**, que era definir la irregularidad por la imposibilidad de un sistema de juego, advierte que un jugador puede modificar su esperanza no sólo eligiendo la disposición de su apuesta según los resultados precedentes o el rango de la tirada, sino también modificando su montante según esos criterios. La noción de martingala, que es más amplia que la de sistema de juego definida por von **Mises**, expresará esta

[26] *E.N.C.*, cap. 2, § 1, p. 30.
[27] *E.N.C.*, p. 32.
[28] *E.N.C.*, p. 77.
[29] *E.N.C.*, p. 47.

idea. En lugar de la serie de funciones $(f_n)_{n \in N}$ que toman sus valores en el conjunto [0, 1] y definen una elección de posición, se considerará una serie de funciones que toman sus valores en el intervalo $[0\ s_n]$, expresando s_n la suma que posee el jugador después de la enésima prueba, cuando adopta el sistema de juego definido por esa serie de funciones. Se establecerá $s_0 = 1$ lo que vuelve a suponer que al principio de la partida el jugador no dispone sino de una suma finita (elegida convencionalmente como unidad). La imposibilidad de una martingala definirá las series aleatorias. Se expresará por la siguiente condición: no existe sistema de juego que asegure una ganancia infinita; dicho de otro modo, la serie $(s_n)_{n \in N}$ está acotada[30]. La introducción del concepto de martingala permite excluir que los colectivos posean ciertas propiedades que no estaban excluidas en la teoría de von **Mises-Wald**. Pero la idea de irregularidad así definida permanece enteramente relativa, pues "supone una elección previa de las propiedades de probabilidad nula a excluir", y **Ville** añade que no puede "dar un modelo matemático de una serie que presente todos los caracteres de una serie tomada al azar; este último problema lo consideramos insoluble y nos sometemos en este punto al parecer de numerosos matemáticos, entre ellos los señores E. **Borel**, **Frechet**, P. **Levy**[31]".

La teoría del colectivo no logra pues su objetivo, que era dar un esquema formal de la idea de serie aleatoria. Dado que siempre es necesario determinar de antemano el conjunto de las propiedades de medida nula que se quiere excluir, sólo puede dar ejemplos de series que tengan *ciertos* caracteres de las series aleatorias, pero no *todos* los caracteres. La razón de esta limitación aparece claramente: negándose a introducir la noción de probabilidad de un suceso singular, la teoría del colectivo debe renunciar a la idea de serie de pruebas independientes. Como el concepto de independencia constituye el componente esencial de la idea que nos formamos del azar, se tienen dificultades para definir la noción de serie aleatoria. En teoría clásica, los conceptos de serie aleatoria y de irregularidad se derivan del concepto de pruebas independientes. Aquí deben ser primeros y el concepto de serie de pruebas independientes es el derivado.

Pero, entonces, sólo hay un método para dar un contenido a las ideas de azar, de irregularidad: es decir, una serie es irregular, aleatoria, producto del azar, cuando es sin ley. Definición puramente negativa y que, tomada al pie de la letra, es un puro sinsentido, pues nada hay sin ley. Por eso von **Mises** abocaba a una contradicción cuando exigía de los colectivos que las frecuencias que definieran fueran invariantes en toda elección de posición.

Queda por relativizar la noción de irregularidad y por estimar como irregulares las series que no obedecen las leyes que corresponden a un conjunto determinado. Las limitaciones impuestas son, por otra parte, poco restrictivas: se sabe que existen series a las que se aplica el teorema de **Bernouilli**; dado que existen colectivos relati-

[30] *E.N.C.*, cap. 4, § 2, pp. 71-73.
[31] *E.N.C.*, p. 77.

vos a toda familia enumerable de selecciones, a reserva de ciertas restricciones concernientes a los conjuntos probabilizados, se tiene certeza de que hay series que son colectivos con respecto a toda selección definida por un algoritmo. Así, **Church** muestra que, en el caso de las alternativas, la definición del colectivo es coherente si se limita a las selecciones definidas por funciones calculables en el sentido de **Turing** o recursivas generales[32].

Pero, sea cual sea la importancia de este último resultado, la relativización de la noción de colectivo implica, de todas formas, una concepción restrictiva de la idea de irregularidad que no se da sin dejar un sentimiento de malestar. Obliga a otorgar un privilegio a un cierto tipo de leyes, las leyes simples o las leyes efectivamente formulables en un lenguaje determinado. De este modo, se introduce una discriminación entre los fenómenos, no a partir de lo que son sino a partir de lo que nuestro modo de conocer nos permite captar de ellos. En consecuencia, no parece que la teoría del colectivo elimine ese elemento subjetivo que se reprochaba a la definición de probabilidad dada por **Laplace**. La noción oscura de probabilidad únicamente se puede reducir en apariencia a la noción de frecuencia, cuyo sentido experimental está claramente definido. El hecho de que la teoría del colectivo, sin aportar un esclarecimiento real del concepto de probabilidad, exija una complicación del formalismo y desemboque en la constitución de teorías necesariamente menos fuertes que el cálculo clásico basta para explicar su descrédito.

La tentativa de dar una significación empírica al concepto de probabilidad, identificando probabilidad y frecuencia, tropieza, pues, con dificultades considerables cuando se trata de constituir un instrumento formal adecuado a esta definición. Es verdad que el fin perseguido era aportar una solución a los problemas concernientes a la aplicación de la noción de probabilidad a datos experimentales. Si la teoría del colectivo resolviera sin dificultad esos problemas, tendría una superioridad real sobre la teoría clásica. Pero nada prueba que ocurra así. En el caso en que se identificara probabilidad y frecuencia en una serie finita de pruebas, los enunciados de probabilidad se convertirían en proposiciones de observación y no se plantearía ningún problema. No ocurre lo mismo si se confunde la probabilidad con una frecuencia-límite en una serie infinita; todavía menos si se exige que esta serie satisfaga ciertas condiciones de irregularidad.

En realidad, la paradoja es que los matemáticos, que han creado la teoría del colectivo para resolver no problemas formales sino las cuestiones de aplicación del cálculo de probabilidades, no han dedicado de hecho sino sumarios estudios a este tipo de cuestiones. Correspondería a **Reichenbach** tratarlos exhaustivamente. Se comprenderá fácilmente el cuidado que les presta cuando se vea que afirma que la construcción de una lógica de la inducción plenamente satisfactoria depende de su solución correcta.

---

[32] Cf. *C.R.S.*

CAPITULO VI

LA INDUCCION Y SU PROGRESO SEGUN REICHENBACH

Para ser lícito, un uso del concepto de probabilidad debe implicar una definición coordinativa de ese concepto. Pero sólo hay una definición coordinativa de la probabilidad que resista al análisis: es la que se utiliza en la teoría del colectivo. En consecuencia, si se quiere que los enunciados de probabilidad inductiva tengan un contenido, interesa interpretarlos del mismo modo que los enunciados de probabilidad matemática. Así se impone la identificación de las dos formas de concepto de probabilidad.

Ciertamente, será preciso establecer que la interpretación de las probabilidades de hipótesis en términos de frecuencias es aceptable. Pero, conseguida esta demostración, la constitución de una lógica inductiva sería posible. El problema general de la inducción vuelve a ser determinar la probabilidad que conviene asignar a las hipótesis. Dado que probabilidad inductiva y probabilidad matemática se confunden, está contenido enteramente en las cuestiones que conciernen a la aplicación del cálculo de probabilidades. Ahora bien, como veremos, la teoría frecuencial reduce estas cuestiones a un problema único: cómo pasar de la medida de una frecuencia en una serie finita de pruebas a la aserción de que esta frecuencia convergirá hacia un límite determinado si se prolonga indefinidamente esa serie. La admisión de una regla única, extremadamente simple, basta para resolverlo y el problema de la justificación de la inducción está enteramente contenido en la justificación de esta regla. En cuanto a los teoremas de la teoría formal de las probabilidades, contendrían virtualmente toda una doctrina del progreso de la inducción que permitiría dar cuenta de prácticas metodológicas que la epistemología tradicional ha sabido reseñar, pero no validar. Este hecho aparecería desde el instante en que se mantuviera de interpretación frecuencial de las probabilidades inductivas.

Tales son los principios fundamentales que permiten afirmar a Reichenbach que "el cálculo de probabilidades se ha convertido poco a poco en la lógica de la ciencia"[1]. Afirmación que contradice la doctrina explícita de numerosos matemáticos, entre ellos von **Mises**, que rechazan toda utilización de su teoría para una solución de los problemas filosóficos de la inducción. La teoría del colectivo, escribe von **Mises**, no es más que una "ciencia natural", en el mismo sentido que la mecánica, por ejemplo. Tiene un valor en la medida en que "idealiza" ciertos fenómenos, los fenó-

[1] *F.L.P.*, § 19, *al final.*

menos de masa. Se verifica por el hecho de que sus consecuencias están de acuerdo con lo que enseña la observación. Necesitando una inducción para ser aplicada a datos experimentales, no puede servir, por tanto, para justificar los procesos inductivos. De todos modos, el problema de la aplicación de una noción formal a la experiencia no podría ser tratado como un problema *formal* y von **Mises** ponía en duda la posibilidad de una lógica inductiva[2]. ¡Ceguera de los matemáticos respecto a la potencia del instrumento que han forjado! Preocupados exclusivamente por resolver los problemas que conciernen a la teoría *matemática* de probabilidades, los autores que han creado la teoría del colectivo se han contentado con una definición de la probabilidad insuficientemente precisa. Nociones esenciales, como las de prueba, suceso, resultado, son utilizadas en su obra de manera ingenua, sin ser sometidas a una crítica suficiente. Su uso conlleva el riesgo de inducir a error, pues da pie a pensar que la idea de probabilidad sólo se aplica a un orden de fenómenos particulares, los fenómenos aleatorios. El concepto de probabilidad no se define a partir de las nociones lógicas fundamentales; se contentan con reducirlo a la idea de frecuencia-límite, idea que tampoco se analiza. Será importante completar el análisis sobre este punto[3]. No porque las precisiones aportadas tengan importancia alguna en el plano de la técnica matemática, sino porque de ellas depende la aplicación de la definición frecuencial a la probabilidad inductiva. Así, la solución de los problemas relativos al fundamento lógico de la probabilidad constituye algo previo a la construcción de una lógica inductiva.

1. Los fundamentos lógicos de la probabilidad

Cuando **Reichenbach** propone una definición de la probabilidad que es privativa de él, aun cuando retome esencialmente la definición frecuencial utilizada por los matemáticos, su objetivo es doble. Por una parte, quiere ampliar el campo de aplicación del concepto de probabilidad y evitar ciertas dificultades, suprimiendo los requisitos relativos a la irregularidad de las series. Por otra parte, intenta mostrar que el concepto de probabilidad es una noción lógica que va ligada a la introducción de un nuevo conector del cálculo de proposiciones y autorizar así la construcción de una lógica inductiva.

Este último resultado se alcanza bastante fácilmente. Desde **Boole** se sabe que es posible, en la teoría de probabilidades, "sustituir los sucesos por proposiciones que afirman que esos sucesos se han producido o se producirán"[4]. Esta transcripción constituye la etapa esencial en la constitución de una teoría lógica de probabilidad. Sin embargo, va acompañada, en **Reichenbach**, por la introducción de una termino-

[2] *P.S.T.*, Pref. y *passim*.

[3] "Los matemáticos se han limitado a axiomatizar la parte matemática del cálculo; ha habido que extender ese sistema a la parte lógica", escribe **Reichenbach** (*F.L.P.*, p. 362).

[4] *I.L.T.*, cap. 16, § 6, p. 247.

logía que, en un primer examen, parece corresponder a la exigencia de un rigor cuya ausencia no tendría consecuencias. De hecho, la legitimidad de esta terminología y la del simbolismo que la acompaña plantean problemas, como vamos a ver.

Reichenbach define la probabilidad de tal manera que los enunciados de probabilidad constituyen una versión debilitada de las implicaciones universales del cálculo de predicados. Consideremos dos clases, A y B, y dos series de variables, (x_n) e (y_n), entre las cuales existe una biyección. Es necesario precisar que esas variables y esas clases son tales que las expresiones de la forma "$x_n \in A$" e "$y_n \in B$" están bien formadas[5]. Un enunciado de probabilidad se construirá como "una implicación general entre enunciados concernientes a la pertenencia a una clase de los elementos de ciertas series dadas"[6]. Se afirmará que "para todo n, $x_n \in A$ implica el grado de probabilidad p $y_n \in B$", siendo p un número; lo que se escribirá:

$$(n)((x_n \in A) \underset{p}{\supset} (y_n \in B)) \tag{1}$$

Precisemos en seguida que, de la implicación general "$(n)((x_n \in A) \supset (y_n \in B))$"[7], se podrá deducir la correspondiente implicación probable de grado igual a 1, sin que la recíproca sea verdadera. De entrada, la noción de probabilidad se presenta como una generalización del concepto de implicación ligada con la introducción de un grado de implicación. Sin embargo, es preciso hacer notar que no se define como un conector que enlace proposiciones, sino series de proposiciones que, por otra parte, deberán ser de un tipo particular.

Dada esta definición, **Reichenbach** propone abreviar la fórmula (1), escribiendo simplemente:

$$(A \underset{p}{\supset} B) \tag{2}$$

Una regla de transcripción permite reinstaurar la escritura inicial: indica en qué caso deberán ser identificadas las series de términos que pertenecen a clases determinadas[8]. Además, está bien introducir una expresión que designe el grado de implicación probable, dado que en el cálculo se razona acerca de esos grados, que son números. Por eso, **Reichenbach** introduce una notación nueva, los símbolos P. La fórmula (2) muestra que, dadas dos clases, A y B, determinan circunstancialmente una im-

---

5 Condición que omite **Reichenbach,** pero que es obvia.

6 *T.P.*, § 9, p. 46.

7 Esta fórmula es claramente una implicación universal, a pesar de su extraña escritura: x e y son de hecho funtores que aplican el conjunto de los enteros en conjuntos de tipo determinado que pueden tomarse como dominios de los argumentos de "$\in A$" y de "$\in B$". Hagamos notar, además, que aportamos al simbolismo de **Reichenbach** algunas modificaciones menores que no señalaremos.

8 Simplemente, se designan por la misma mayúscula, acompañada de índices, las clases tales que a ellas se refiere la misma serie de variables. (Cf. *T.P.*, § 10, p. 49.)

plicación probable de grado determinado. Este grado se designará por $P(A, B)$ y se establecerá, pues, por definición:

$$[P(A, B) = p] =_{Df.} (A \underset{p}{\supset} B) \tag{3}$$

"P" es un funtor numérico que hace corresponder un número a una pareja de clases. De hecho, en la obra fundamental de **Reichenbach**, *The Theory of Probability*, se utilizan esencialmente los símbolos P.[9]

La legitimidad de este simbolismo plantea problemas. La escritura de un símbolo P supone establecida la existencia de una implicación probable y la unicidad de su grado. Si no se realizara la segunda condición, los símbolos P no serían funtores; sin la primera, esos funtores no estarían definidos por todas partes. Veremos en seguida que la unicidad de la implicación probable constituye uno de los axiomas de la teoría de probabilidades; en cuanto a la existencia de una implicación probable entre toda pareja de clases, será postulada implícitamente. Pero, en realidad, si el paso de la fórmula (2) a la fórmula (3) puede justificarse fácilmente, no ocurre lo mismo con lo que atañe a la transición de la fórmula (1) a la fórmula (2). Ese paso no es, quizás, una simple abreviación de lenguaje que no comporta consecuencias, como quiere hacer creer **Reichenbach**. La notación primitiva da pie a pensar que una implicación probable se determina cuando se dan dos clases y dos series de elementos. En la notación (2) sólo figuran nombres de clases. ¿Es preciso concluir de ahí que la implicación probable está definida desde el momento en que se da una pareja de clases y que no es relativa a un cuadruplete formado por dos clases y por dos series de elementos? El problema merece ser planteado tanto más cuanto que la definición de la probabilidad en términos de frecuencias, que **Reichenbach** mantendrá, supone dadas, además de las clases, las series de elementos. Habremos de preguntarnos si la introducción de la fórmula (2) no encubre una dificultad fundamental en el sistema de **Reichenbach**.

La implicación probable ha sido introducida, hasta ahora, a simple título de símbolo nuevo que puede figurar en las fórmulas de un lenguaje que admite, además, entre otros, símbolos aritméticos, símbolos de clases, variables individuales, etc. Después de haber definido la morfología de ese símbolo, quedan por determinar sus reglas de uso, es decir, quedan por enunciar los axiomas en que figura. En lo esencial, esos axiomas serán semejantes a los axiomas tradicionales de probabilidad.

El primero, denominado axioma de la univocidad, afirma que el grado de la implicación probable está unívocamente determinado cuando se dan dos clases A y B, a reserva de que ciertos elementos de la primera serie tomada en consideración

[9] Hagamos notar que el orden de los argumentos es el inverso del que se adopta corrientemente: $P(A, B)$ designa la probabilidad de que un elemento de A pertenezca a B.

pertenezcan a la clase A. La notación $\bar{A}$ abreviará la fórmula "$(n) \sim (x_n \in A)$"[10]. En esas condiciones, este axioma se escribe:

$$(p \neq q) \supset [((A \underset{p}{\ni} B) \,\&\, (A \underset{q}{\ni} B)) \in \bar{A}\,]$$

A continuación se introducen dos axiomas para normalizar los valores del grado de probabilidad. El primero enuncia que, si $A \subset B$, entonces la implicación probable $(A \ni B)$ existe, y se tiene $P(A, B) = 1$; el segundo que, si $\bar{A}$ es falsa, y si existe una implicación probable de grado p entre A y B, entonces $P(A, B) \geqslant 0$.

Los dos axiomas siguientes afirman la existencia, y permiten determinar el grado, de ciertas implicaciones probables cuando se dan otras implicaciones. Son el equivalente del principio de adición y de una versión debilitada del principio de multiplicación de la teoría clásica. El primero se enuncia así: Si $P(A, B)$ y $P(A, C)$ están definidos y si las clases B y C están separadas en A (en otros términos, si $(A \cap B \cap C)$ es vacía), entonces $P(A, B \cup C)$ está definida y se tiene:

$$P(A, B \cup C) = P(A, B) + P(A, C)$$

El segundo tiene la forma siguiente: Si están definidos $P(A, B)$ y $P(A \cap B, C)$, también lo está $P(A, B \cap C)$ y existe una aplicación de $R \times R$ en R tal que, para todas las clases A, B y C, se tiene:

$$P(A, B \cap C) = f(P(A, B), P(A \cap B, C))$$

Se demuestra entonces fácilmente que f es la función producto, del mismo modo que se prueba que el funtor P toma sus valores en el intervalo $[0, 1]$ y que $A \cap B = \emptyset$ implica $P(A, B) = 0$. Toda esta construcción es efectuada cuidadosamente por **Reichenbach**[11].

Con algunas excepciones, como la que concierne al caso en que B contiene a A, los axiomas precedentes no permiten afirmar la existencia de implicaciones probables. Sin embargo, se puede añadir a los axiomas una regla que autorice la transferencia de las afirmaciones de existencia: supuesta la existencia de ciertas implicaciones probables de grado definido, se estimarán como existentes todas las implicaciones cuyo grado[12] el cálculo permita entonces determinar. Pero esta regla queda como puramente condicional y no autoriza la aserción absoluta de ninguna implicación

[10] La vacuidad de A es una condición suficiente, pero no necesaria, para que se tenga $\bar{A}$. Esta condición se realiza desde el momento en que ninguno de los elementos de la serie x_n pertenezca a A, aunque A no sea vacía.

[11] *T.P.*, § 12-15, pp. 52-67.

[12] *T.P.*, § 11, pp. 52-53. **Reichenbach** dice que esta regla no es un axioma del cálculo, sino una regla del mismo tipo que las reglas de inferencia de la lógica deductiva.

probable, excepto los casos triviales. Para aseverar categóricamente implicaciones probables, es indispensable una interpretación que aporte una definición coordinativa de este concepto.

Sea m un entero arbitrario estrictamente positivo. Consideremos las secciones finitas de las series (x_n) e (y_n) que comprendan los m primeros términos. $N_m(A)$ designa el número de términos de la sección de la serie (x_n) que pertenecen a A y $N_m(A \cap B)$, el número de los términos que satisfacen esta condición mientras que el término correlativo de la serie (y_n) pertenece a B. Se llamará frecuencia relativa de las A que son B en una sección inicial de m términos y se designará por $F_m(A, B)$, el cociente $N_m(A \cap B)/N_m(A)$. Este cociente estará definido si $N_m(A)$ es distinto de 0. La hipótesis $\bar{A}$ permite afirmar que existe un entero m_0 tal que para todo m, si $m \geqslant m_0$, está definida $F_m(A, B)$. Ocurriendo esto, si se satisface la condición $\bar{A}$, se puede siempre elegir m de tal manera que, al establecer $P(A, B) = F_m(A, B)$, todos los axiomas propuestos son tautologías. Esta observación tiene el interés de aportar una prueba de la consistencia del sistema de axiomas. Pero es insuficiente para las necesidades del cálculo de probabilidades, que exige que la probabilidad se identifique con una frecuencia-límite. Por eso **Reichenbach** mantiene la siguiente definición: "Si para una pareja de series $\langle (x_n), (y_n) \rangle$ la frecuencia relativa tiende hacia un límite p para $m \to \infty$, el límite p es llamado probabilidad de A en B, en esa pareja de series. En otros términos, se introduce la definición coordinativa siguiente:

$$P(A, B) = \lim_{n \to \infty} F_m(A, B)"[13].$$

Se puede verificar fácilmente entonces que, en esta interpretación, los axiomas son siempre tautologías.

Reichenbach llega así a una definición de la implicación probable a partir de los conceptos aritméticos y de las nociones fundamentales de la lógica (clases, proposiciones, etc.). En la medida en que las proposiciones del tipo "$x_n \in A$", "$y_n \in B$" sean proposiciones de observación, se puede considerar que la definición mantenida es una definición coordinativa. Esta definición, muy próxima a la que se utiliza en la teoría del colectivo, se distingue de ella, sin embargo, por algunos aspectos que indican que corresponde a un nivel de elaboración formal superior. En matemáticas se habla en términos de pertenencia de los puntos representativos a ciertas partes de un "espacio de marca", que es un espacio abstracto. De ahí la distancia de los datos de observación a los enunciados formales. Aquí se trata de variables y de clases. Basta con que se elijan adecuadamente los tipos de esas variables individuales y de

[13] *T.P.*, § 16, p. 69. En lugar de decir "probabilidad de A en B", expresión que, según **Reichenbach**, tendría la ventaja de mostrar que se va de lo conocido a lo desconocido, se hablará igualmente de la "probabilidad de que A sea un B", o de "la probabilidad de B, si A", expresiones que justifica el uso.

esas clases para que la definición pueda aplicarse. Así, se simplifican circunstancialmente los procedimientos de aplicación en la medida en que esas clases podrán ser definidas por propiedades de observación. Las series (x_n) e (y_n) se distinguen, mientras que corrientemente se confunden; y no se requiere de ningún modo que todos los términos de la serie (x_n) pertenezcan a A[14]. Gracias esas modificaciones menores, la definición obtiene una mayor flexibilidad en sus aplicaciones.

Por último, la definición propuesta podrá sufrir una legítima modificación que permitirá tener al concepto de probabilidad por una noción lógica, o más rigurosamente, metalógica. **Reichenbach** describe esta modificación en múltiples pasajes cuya precisión deja que desear y cuya multiplicidad revela falta de certeza. Se puede recoger la siguiente exposición: en primer lugar, hagamos notar que las expresiones $(x_n \in A)$ e $(y_n \in B)$ son funciones proposicionales con un argumento. Designamos esas funciones proposicionales respectivamente por $f(x_n)$ y $g(y_n)$. La fórmula (1), que define la implicación probable, se escribirá:

$$(n)(f(x_n) \underset{p}{\supset} g(x_n))$$

Llamemos *serie proposicional* a una función proposicional que depende exclusivamente de una variable numérica. Se puede aplicar la definición de probabilidad a series proposicionales cualquiera sin limitarse al caso en que $f(x_n)$ es del tipo "$x_n \in A$". Por otra parte, hay derecho a considerar que la implicación probable tiene por argumentos no las series proposicionales, sino las expresiones formales que las traducen, y a hablar en términos de frecuencia de verdad[15]. La implicación probable entre dos series proposicionales se definirá de este modo: sea una sección inicial de m términos de las series proposicionales $f(x_n)$ y $g(y_n)$. Se designa por $V_m(f(x_n))$ el número de fórmulas del tipo $f(x_n)$ verdaderas cuando n varía de 1 a m; por $V_m(f(x_n) \,\&\, g(y_n))$ el número de conjunciones del tipo $f(x_n)$ y $g(y_n)$ verdaderas cuando n varía de 1 a m. La *frecuencia de verdad* de f en g en una sección inicial de m términos se designará por $\varphi_m(f(x_n), g(y_n))$. Por definición, será igual a $\dfrac{V_m(f(x_n) \,\&\, g(y_n))}{V_m(f(x_n))}$. Se definirá entonces la *probabilidad de verdad* de f en g como el límite hacia el que tiende $\varphi_m(f(x_n), g(y_n))$ cuando m tiende hacia el infinito. Así, la noción de probabilidad puede derivarse del concepto de verdad –noción metalógica– desde el momento en que se dan expresiones que se interpretan como series proposicionales.

Pero, entre la definición mantenida corrientemente por los matemáticos frecuencialistas y la propuesta por **Reichenbach**, hay una divergencia esencial que hemos

[14] Si esta condición se verificara, se diría que la serie (x_n) es compacta. Comúnmente se definen las frecuencias en el solo caso en que la primera serie es compacta.

[15] Este hecho debería indicarse por el uso de comillas cercando los argumentos de la implicación probable. A fin de simplicar la escritura, utilizaremos, como hace más a menudo **Reichenbach**, la convención de autonimia.

silenciado hasta ahora. Atañe a las condiciones de irregularidad a las que se sujetan las series probabilitarias. **Reichenbach** autoriza el uso del término probabilidad siempre que se defina una frecuencia-límite, incluso si las series tomadas en consideración son regulares[16]. ¿Quiere decir esto que finge ignorar que la mayor parte de las demostraciones del cálculo de probabilidades *s* no se consiguen sino en tanto que se supongan cumplidas ciertas condiciones de irregularidad? En modo alguno, pero justifica su punto de vista por el hecho de que la teoría de probabilidades comprende un estudio de series que presentan regularidades parciales –tales como las cadenas de **Markov**– y de que hay continuidad desde las series irregulares a las series perfectamente regulares. Pero, en realidad, por más que lo diga **Reichenbach**, su elección no es una simple decisión concerniente a la terminología. Revela el hecho de que la teoría de la irregularidad, con todo ampliamente desarrollada en sus obras, no juega un papel esencial. Veremos más adelante de qué naturaleza son las insuperables dificultades que obligan a **Reichenbach** a ampliar el concepto de probabilidad. De momento, nos creemos autorizados a limitar la exposición de la teoría de la irregularidad, exposición por lo demás demasiado compleja en **Reichenbach**, a lo que será efectivamente utilizado en la constitución de una lógica inductiva.

Sean $\alpha, \beta \ldots \sigma, \tau$, enteros positivos. $P(A \cdot C^{\alpha}, D^{\beta} \ldots G^{\sigma}, H^{\tau})$ será la expresión en símbolos P de la implicación

$$(n)\ \{((x_n \in A)(z_{n+\alpha} \in B)(u_{n+\beta} \in C) \ldots (w_{n+\sigma} \in G)) \underset{p}{\supset} (y_{n+\tau} \in H)\}$$

Supongamos satisfechas las siguientes condiciones:

1) Las series $(z_n), (u_n), \ldots, (w_n)$ son idénticas a la serie (y_n).

2) Las clases $C, D, \ldots, H,$ son idénticas a B o a $\sim B$, o, de modo más general, corresponden a una partición $B_1, B_2, \ldots B_n$, de B.

3) Los enteros $\alpha, \beta, \ldots, \sigma, \tau$, son los enteros de 1 a ν tomados en el orden natural.

En ese caso, la probabilidad previamente definida se escribirá $P(A \cdot B^1_{i_1} \cdot B^2_{i_2} \ldots B^{\nu-1}_{i_{\nu-1}}, B^{\nu}_{i_\nu})$ y se llamará una probabilidad de fase; ν será la longitud de la fase. Supongamos, como hace **Reichenbach**[17], que la serie A es compacta; la probabilidad de fase se determina como la probabilidad de A en B_{i_ν}, si sólo se retienen los términos precedidos de la configuración $B_{i_1} \cdot B_{i_2} \ldots B_{i_{\nu-1}}$. La existencia de una probabilidad semejante no se estimará como conseguida más que si la serie así seleccionada contiene una infinidad de términos[18], y si la frecuencia de los B_i converge, lo cual no es cierto, incluso si está definida la probabilidad $P(A, B_{i_\nu})$.

---

[16] En rigor, si A es la clase de los enteros y B la de los enteros pares, se puede hablar de la probabilidad de que un número sea par, si se sigue el uso de **Reichenbach.**

[17] *T.P.*, § 27, p. 135.

[18] Lo que se supone en los axiomas de orden que introduce **Reichenbach** y que son tautologías en la interpretación en términos de frecuencias-límites. (*T.P.*, § 28, pp. 136-141.) Silenciaremos esos axiomas, cuyo uso no plantea problemas.

Se dirán sin remanencia con respecto a la familia $(B_i)_{i \in I}$ las series en que las probabilidades de fase, todas ellas existentes, sean, también todas, iguales a las probabilidades principales correspondientes, lo que se expresa por la condición:

$$P(A \cdot B^1_{i_1} \cdot B^2_{i_2} \ldots B^{\nu-1}_{i_{\nu-1}}, B^{\nu}_{i_\nu}) = P(A, B^{\nu}_{i_\nu}),$$

para todo entero ν y toda elección de los índices $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ en el conjunto I.

De una selección cualquiera de los términos de una serie, se dirá que pertenece al dominio de invarianza de la serie si deja invariantes todas las probabilidades principales y las probabilidades de fase. Ciertos resultados del cálculo no se establecerán sino a reserva de que el dominio de invarianza de las series consideradas contenga un conjunto definido de selección. Las series *normales* jugarán un pepel esencial. Se denomina división regular del tipo (λ, k) una selección que consiste en retener únicamente los términos de rango $r = k \pmod{\lambda}$. Una serie será normal si es sin remanencia y si su dominio de invarianza contiene todas las divisiones regulares. De hecho, en el caso en que la familia $(B_i)i \in I$ no contiene más que dos elementos, las series normales son equivalentes a los números admisibles de **Copeland**. La normalidad es una condición suficiente, pero no necesaria, para que el teorema de **Bernouilli** se aplique a las frecuencias que se pueden determinar a partir de una serie[19]. La definición mantenida por **Reichenbach** abre, pues, la vía a una lógica inductiva sin excluir los resultados alcanzados en la teoría del colectivo que encuentran su lugar en la teoría del orden.

2. El problema de la aplicación y la regla de inducción.

La aplicación de una teoría formal a datos experimentales exige que se esté en posesión de una definición coordinativa de los conceptos de esta teoría. En general, los que reciben una definición de este tipo no son los conceptos primitivos. Se sigue de ahí que no se pueden transcribir los axiomas en el lenguaje de observación sino simplemente deducir de ellos consecuencias que son proposiciones de observación. Será preciso que la experiencia verifique esas consecuencias para que la aplicación sea legítima.

En el caso del cálculo de probabilidades, nos encontramos en una situación privilegiada. Sólo hay una noción primitiva, la implicación probable, y es ella la que recibe una definición coordinativa. Además, los axiomas que rigen su uso se escogerán de tal suerte que son tautologías desde el momento en que se admite que las probabilidades existen, dicho de otro modo, que las frecuencias convergen en las

[19] De hecho, **Reichenbach** distingue varios tipos de enumeración de frecuencias en porciones de series: superponiéndose por segmentos, por secciones. Resulta inútil distinguirlas. Como ocurre a menudo en su obra, los desarrollos más complejos no son de ninguna utilidad cuando se abordan los problemas epistemológicamente significativos.

series consideradas. Sin embargo, incluso si A y B son clases definidas por propiedades de observación, una implicación probable entre A y B es un enunciado que no es el equivalente de un conjunto finito de proposiciones de observación, sino de una clase infinita de proposiciones de este tipo. Por eso no se trata de esperar de la experiencia que autorice su aserción, si no se añade alguna regla nueva a la lógica deductiva. Pero todo el problema de la aplicación del cálculo de probabilidades se reduce a esta cuestión única: determinar las condiciones en las que se puede aseverar una implicación probable de grado dado. Ciertamente, hay resultados que no pueden establecerse más que cuando se conoce el tipo de orden de una serie; pero es preciso añadir que ese tipo de orden se define cuando se determinan probabilidades en las series parciales. Es decir, la determinación del tipo de orden está incluida en el problema precedente, con esta reserva casi se puede, si es necesario, determinar simultáneamente una infinidad de probabilidades.

Reichenbach no piensa de ningún modo en apelar al principio de indiferencia para determinar probabilidades. El hecho de que ese principio sea imposible de asimilar por una filosofía empirista bastaría para excluirlo, independientemente de todas las reservas que hemos hecho acerca de su validez y de su alcance. Pero se excluyen también ciertos métodos, entre los que figura el método de la máxima verosimilitud, estimado, sin embargo, por ciertos autores, como perfectamente acorde con los imperativos del pensamiento empirista. ¿Por qué esta exclusión? Según **Reichenbach**, el método de la máxima verosimilitud exige el conocimiento previo, si no de algunos grados de probabilidad, al menos de ciertos caracteres de la métrica probabilitaria. En efecto, para determinar una probabilidad por la máxima verosimilitud a partir de un recuento de frecuencia en una serie finita, es necesario suponer que las pruebas son independientes y de probabilidad constante[20]. Ocurriría lo mismo con todos los métodos introducidos en la teoría de la inferencia estadística con el fin de evitar el recurso a los esquemas bayesianos: suponen siempre que se admite la validez de ciertas hipótesis concernientes a las métricas probabilitarias, la pertenencia de ciertas distribuciones a familias paramétricas determinadas. Y lo mismo incluso con procedimientos que sirven para concluir asignaciones de probabilidad a partir de hipótesis, por débiles que sean, como hace **Poincaré** en *La Science et l'Hypothèse*[21].

Reichenbach reprocha a todos estos métodos que sólo concluyen cuando se establecen ciertas hipótesis concernientes a probabilidades. Corresponden a un estado del conocimiento que **Reichenbach** denomina *conocimiento avanzado* y que opone al *conocimiento primitivo,* "estado que no incluye ningún conocimiento de *proba-*

[20] *T.P.*, § 70, p. 364.

[21] *S.H.*, pp. 233-235. Se sabe de qué modo intenta probar **Poincaré** la equiprobabilidad de "rojo" y de "negro" en la ruleta, suponiendo que los ángulos del centro de los sectores rojos y negros son iguales. ω, que designa el ángulo recorrido por la bola, es una variable aleatoria. Para concluir, bastan hipótesis débiles acerca de la función de distribución de ω (continuidad, variación débil del valor de $f(\omega)$ por un incremento de ω que corresponde al tamaño de un sector de color determinado.

bilidades"[22]. **Reichenbach** concede una considerable importancia a esta distinción elemental. Para él, el problema de la aplicación del cálculo de probabilidades únicamente puede considerarse como resuelto de manera satisfactoria si se da una regla que permita aseverar ciertos enunciados de probabilidad desde el momento en que se recogen ciertos datos experimentales y sin postular ninguna hipótesis de naturaleza probabilitaria. Es decir, debe recibir una solución al nivel del conocimiento primitivo y **Reichenbach** manifiesta claramente su intención de constituir una teoría de la inducción primaria[23].

Para determinar probabilidades en el conocimiento primitivo, será preciso servirse de una regla que no se verifica por la experiencia como tampoco se justifica por la lógica. Esta regla será de naturaleza inductiva y **Reichenbach** propone adoptar simplemente una versión debilitada del famoso principio de *inductio per enumerationem simplicem.* Se sabe que este principio autoriza la aserción de una implicación universal que ha sido verificada algunas veces y nunca ha sido refutada. Es necesario someterlo a dos modificaciones. Por una parte, deberá llevar a la simple aserción de implicaciones probables de grado p. Por otra parte, no se requerirá que p sea igual a la frecuencia observada en una serie finita, sino simplemente que se aproxime a ella. Se llega así a la formulación siguiente de una regla denominada por **Reichenbach** regla de inducción: "si una sección de m términos de una serie (x_n), compuesta de términos que son todos A, presenta una frecuencia f_m de términos tales que los (y_n) correspondientes sean B, entonces apostamos sobre el hecho de que la frecuencia tiende hacia un límite p que pertenece al intervalo $[f_m - \delta, f_m + \delta]$, cuando se prolonga la serie"[24]

A partir de la regla de inducción, se puede volver a encontrar, bajo una forma ligeramente modificada, el principio de inducción por enumeración simple. Supongamos que, en la sección observada, los A son todos B; la regla de inducción autoriza la aserción siguiente: "la frecuencia de los A que son B tiende hacia un límite que pertenece al intervalo $[1 - \epsilon, 1]$", siendo ϵ un número que se puede escoger arbitrariamente. Bajo la forma tradicional, el principio de enumeración autorizaba que se concluyera que "todos los A son B". Las dos conclusiones están muy próximas, pero no son idénticas. La regla de inducción permite concluir no que la frecuencia converge hacia 1, sino simplemente que pertenece a un intervalo $[1 - \epsilon, 1]$ que se puede elegir tan pequeño como se quiera, pero no nulo. Pero, sobre todo, lleva a la aserción de una simple implicación probable y no de una implicación universal. In-

[22] *T.P.*, § 70, p. 364.

[23] "La teoría general de la inducción... debe darse con respecto al conocimiento primitivo y, por tanto, sin uso de consideraciones probabilitarias." (*T.P.*, § 74, p. 383).

[24] *F.L.P.*, cap. 5, § 19. Hagamos notar que hay otras formulaciones de esta regla precisando, por ejemplo, que δ será débil. (*E.P.*, § 38, p. 340) o limitando su uso al conocimiento primitivo (*T.P.*, § 87, p. 446). Hemos escogido aquí la formulación más simple, que supone que la primera serie es compacta, lo cual no es en absoluto restrictivo dado que siempre se pueden suprimir los términos que no son A y proceder a una nueva enumeración de los que subsisten.

cluso cuando se estableciera $(A \underset{1}{\ni} B)$, no se puede deducir de ahí que $(x)(Ax \supset Bx)$. La que constituye uno de los axiomas de probabilidad[25] es la implicación conversa. De hecho, la implicación universal es equivalente a la conjunción de dos implicaciones probables de grado 1: $(A \underset{1}{\ni} B)$ y $(\sim B \underset{1}{\ni} \sim A)$, que son independientes una de otra[26]. La limitación a implicaciones probables, circunstancialmente de grado 1, tiene, por otra parte, una ventaja que subraya **Reichenbach**: permite evitar la paradoja de **Hempel**, dado que, como nos convenceremos fácilmente volviendo a las definiciones, la ley de contraposición no se aplica a las implicaciones probables[27]. De este modo, el punto de vista probabilitario permitiría evitar ciertas dificultades de la teoría clásica de la inducción.

Nos falta precisar el estatuto de la regla de inducción y de los enunciados cuya aserción autoriza. Esta regla no puede ser presentada bajo la forma de una aserción correspondiente al cálculo de probabilidades. Suponiendo que se designe por F^p_m una sección de mA cuyos p son B, no se puede escribir "apostamos sobre que $P(A \cdot F^p_m; B) \in [p/m - \delta, p/m + \delta]$". Un enunciado semejante quedaría manifiestamente refutado en el caso de las series remanentes. La regla de inducción debe ser estimada como un enunciado metalingüístico cuyo estatuto es idéntico al estatuto de las reglas de inferencia de la lógica deductiva. No es una relación de probabilidad escribe **Reichenbach**, sino una relación que funda aserciones de probabilidad[28]. Esta precisión, que puede parecer poco esencial, es necesaria para evitar contradicciones demasiado fáciles.

En cuanto a los enunciados a los que lleva su empleo, nada prueba que sean verdaderos, sino que se tendrán por tales. Eso es lo que significa la expresión "mise" (*posit*) que se les aplica: Una "mise" es un enunciado que estimamos como verdadero aun cuando su valor de verdad nos sea desconocido[29]. La noción de propuesta es próxima a la de apuesta; sin embargo, se distingue de ella. Quien dice apuesta dice envites y, por tanto, determinación de la ganancia o de la pérdida posibles. No hay nada semejante en la idea de propuesta. Para que la propuesta se convierta en una apuesta sería preciso coordinarla con un envite. Esto es lo que se hace en la teoría de la decisión estadística, donde se introduce una función de pérdida y una me

---

[25] Es el axioma II, 1 (*T.P.*, § 12, p. 54).

[26] La relación citada aquí se prueba en *T.P.*, § 85, p. 435.

[27] *Ibid.*

[28] *T.P.*, § 87, pp. 450-451.

[29] *Ibid*, § 72, p. 373. La traducción de *posit* por "mise" es elegida por el propio **Reichenbach** (Cf. *F.L.P.*).

[29] bis. A partir de aquí vamos a traducir "mise" por "propuesta". Sabemos que su traducción literal es "puesta", "puesta en juego", "posta", "postura", términos que generalmente se estiman como sinónimos de "apuesta". Pero hemos buscado otro término que exprese un carácter más general: el carácter de algo que se aventura, que se lanza, que se postula y, en realidad, se propone como posible. Dejamos la palabra "apuesta" para traducir "pari" y reservamos "envite" para "enjeu". (N. T.).

dida del riesgo. Pero ese paso de la propuesta a la apuesta no se ha operado en la teoría de **Reichenbach**.

¿Quiere decir esto que el contenido de la doctrina de **Reichenbach** se reduce a la formulación de una regla inductiva, por lo demás banal, y a la trivial constatación del carácter incierto de todo conocimiento inductivo? Si fuera así, sería una ruin teoría y se comprendería mal la importancia que **Reichenbach** confiere al cálculo de probabilidades dado que, hasta ahora, ningún uso se ha hecho de los resultados de ese cálculo. Además, ¿se puede reducir toda inducción a una aplicación de la regla que acaba de enunciarse? Si se impone una respuesta afirmativa cuando únicamente se toman en consideración las generalizaciones más simples, no ocurre lo mismo en el caso de las inducciones más complejas y el propio **Reichenbach** ha insistido sobre el hecho de que toda inducción no se reduce a una generalización[30].

Reichenbach aporta la siguiente respuesta a estas dificultades: el cálculo de probabilidades permite componer los enunciados obtenidos por esa operación simple que es la aplicación de la regla de inducción. Las formas complejas de inducción aparecen en el análisis como el producto de la aplicación de los teoremas del cálculo de probabilidades y del empleo reiterado de la regla de inducción, que es así el único paso estrictamente inductivo que interviene en la constitución del conocimiento experimental. En particular, sería posible constituir una teoría del progreso de la inducción que muestre cómo podemos ponderar, mejorar y circunstancialmente corregir, las propuestas obtenidas por aplicación de la regla de inducción y que justifique los métodos inductivos admitidos corrientemente.

3. La lógica probabilitaria y el progreso de la inducción

Los enunciados obtenidos por aplicación de la regla de inducción no son más que propuestas: ignoramos su valor de verdad. Pero es posible definir un predicado, el *peso,* que medirá la confianza más o menos grande que es razonable otorgarles y que "ocupa el lugar del valor de verdad en todos los casos en que este último no puede ser determinado"[31]. La teoría del progreso de la inducción comienza cuando se intenta atribuir un peso a las propuestas.

Pero, ¿qué es ese peso que debe ser el sustituto del valor de verdad? **Reichenbach** lo define como "aquéllo en que se convierte un grado de probabilidad cuando se aplica a un caso singular"[32]. La que dará sentido a la noción de peso es, por tanto, la teoría de la probabilidad del suceso singular unida a la interpretación lógica. ¿Quiere decir esto que, después de haber definido la probabilidad en términos de frecuencias, **Reichenbach** se ve llevado a introducir un segundo concepto de proba-

[30] Cf. Intr.
[31] *E.P.*, § 22, p. 188.
[32] *T.P.*, § 34, p. 314.

bilidad aplicable a los sucesos singulares y a las proposiciones aisladas? En modo alguno. Los principios de su teoría, que exigen una definición coordinativa de la probabilidad, le imponen la identificación de todos los sentidos de este concepto. Por eso se niega a tomar en consideración la tesis keynesiana según la cual el concepto de probabilidad aplicada a un suceso singular es un concepto primitivo, indefinible, constituyendo las leyes de probabilidad "una lógica cuantitativa basada sobre una evidencia comparable a la de la lógica ordinaria"[33].

Sin embargo, una teoría frecuencial no podría dar una significación directa al concepto de probabilidad de un suceso singular. Será preciso, pues, otorgarle simplemente un sentido ficticio y derivado, obtenido por "una transferencia de significación de lo general a lo particular"[34]. Entendamos por eso que, cuando una serie (o una pareja de series) define una probabilidad, se decide atribuir esta probabilidad a cada término (o pareja de términos) de la serie. Cuando se dice que la probabilidad de obtener 1 al tirar un dado es de 1/6, esta aserción sólo puede tener un sentido, a saber, que esa tirada pertenece a una serie en la cual la frecuencia de los 1 converge hacia 1/6. Pero esta definición es difícilmente aplicable a algunos casos. Supongamos que, en una serie de tiradas de dado, la tercera esté trucada y se coloque la cara del 1 de tal manera que aparezca. Esta única trampa no modifica la frecuencia de los 1 en la serie de tiradas, si se supone esta serie como prolongada indefinidamente. No se la puede descubrir considerando las series parciales obtenidas por elecciones de posición. En esas condiciones, ¿se puede dar un sentido frecuencial al enunciado "la aparición de 1 en la tercera tirada de la serie tiene una probabilidad igual a 1"? **Reichenbach** responde afirmativamente: basta con considerar una serie infinita de series infinitas del mismo tipo, en las que la tercera tirada está siempre trucada, y considerar la frecuencia-límite de 1 en la serie formada por todas las terceras tiradas[35]. **Reichenbach** da el nombre de retículo a una serie de series, una de cuyas secciones finitas puede presentarse bajo la forma de un cuadro rectangular.

Pero surge una nueva dificultad; un mismo suceso puede insertarse en series distintas y, en consecuencia, su probabilidad quedará indeterminada. Si no se precisa la clase de referencia, la noción de probabilidad de un suceso singular es ambigua. Además, la definición propuesta es manifiestamente inaplicable en el caso de las series remanentes, dado que se atribuyen a sus términos probabilidades distintas de la frecuencia-límite de la serie y esas probabilidades dependen de los resultados precedentes. Para evitar esta dificultad y suprimir la ambigüedad, es necesario añadir a la definición frecuencial de la probabilidad del suceso singular un principio que gobierne la elección de la clase de referencia. Este principio exigirá que se tome "la clase más pequeña para la que puedan reunirse estadísticos dignos de confian-

[33] *T.P.*, § 71, p. 370.
[34] *T.P.*, § 72, p. 377.
[35] *T.P.*, § 34, p. 167 y sig.

za"[36]. Definida como frecuencia-límite en esta serie, la probabilidad del suceso singular estará perfectamente determinada. Procede hacer notar que la restricción a la serie más pequeña admisible puede obtenerse por vías diversas. Se puede restringir una serie utilizando los procedimientos matemáticos de selección de las series parciales. Así, en virtud de los resultados obtenidos cuando se selecciona entre un grupo de predecesores, nos vemos llevados a dar probabilidades distintas a los diversos términos de una serie remanente. Pero es posible restringir la serie exigiendo que sus términos posean ciertas propiedades empíricas. ¿Se quiere definir la probabilidad de que un hombre de 50 años sobreviva al menos un año? Designando A la propiedad "ser un hombre de 50 años de edad", y B, la propiedad "sobrevivir al menos un año", se podrá elegir como valor de esta probabilidad el grado de implicación probable ($A \ni B$). Pero si se conoce su estado de salud, su condición social, etc..., se podrá restringir la clase A a los individuos que presenten los mismos caracteres, a reserva de que se disponga de recuentos estadísticos dignos de confianza para determinar la frecuencia de B cuando la clase A se restringe de este modo.

La teoría frecuencial da sentido a la idea de probabilidad de un suceso singular o, más exactamente, a la idea de probabilidad relativa a una pareja de sucesos, dado que la probabilidad se define relativamente a una pareja de series y no relativamente a una serie única. Así, se tiene derecho a hablar de la probabilidad de que salga 1 cuando se tira este dado. La transición a la interpretación metalógica autoriza entonces la introducción del concepto de peso: si dos series proposicionales definen una probabilidad, esta probabilidad se atribuirá a una pareja cualquiera de proposiciones correspondientes a esas series. Designando α y β fórmulas proposicionales, $P(\alpha, \beta)$ recibe así un sentido; la elección de las series de referencia se somete, naturalmente, a las restricciones que acabamos de señalar. Incluso está permitido hablar de la probabilidad absoluta de β cuando se sabe que α es verdadera. Esta probabilidad, designada por $P(\beta)$, se calculará ciñéndose al caso en que α está inmersa en una serie compacta (es decir, compuesta exclusivamente de proposiciones verdaderas). $P(\beta)$ será entonces la frecuencia de verdad en la serie correlativa. **Reichenbach** llama peso de una proposición a su probabilidad definida de esta manera. La toma en consideración de los pesos permite la construcción de una lógica probabilitaria y **Reichenbach** elabora tablas de verdad dando el peso de las proposiciones obtenidas enlazando proposiciones cuyo peso se conoce[37] mediante conectores proposicionales. Esas tablas no hacen, por otra parte, sino traducir teoremas elementales del cálculo de probabilidades.

La determinación del peso de las propuestas abre el camino a una teoría del progreso de la inducción. La simple aplicación de la regla de inducción lleva a la aserción de una propuesta cuyo peso se ignora. Una propuesta tal se llama ciega. Pero es posible estimarla. Basta con que se la refiera a una serie virtualmente infinita de propuestas semejantes, que se relacionan con los mismos datos, y con que se enumere

[36] *T.P.*, § 72, p. 374.
[37] *T.P.*, § 80, p. 308.

la frecuencia de las series que conducen a una propuesta idéntica. Así toma sentido una expresión simbólica del siguiente tipo: $P(P(A, B) \in [f_1 - \delta_1, f_1 + \delta_1]) \in \in [f_2 - \delta_2, f_2 + \delta_2]$. Esta expresión afirma que el peso de una propuesta pertenece a un intervalo determinado. Concierne a una probabilidad de probabilidad, que **Reichenbach** denomina probabilidad de segundo nivel. Un enunciado de este tipo, obtenido por aplicaciones sucesivas de la regla de inducción en dos niveles diferentes, constituye una propuesta y puede, a su vez, ser apreciada, y así sucesivamente. Sin embargo, si se tiene derecho a hablar de probabilidades de cualquier nivel (pero finito), el sistema de las propuestas apreciadas se acaba necesariamente con una propuesta que queda ciega. En esas condiciones, la reiteración de la regla de inducción, que lleva necesariamente a una última propuesta ciega, ¿constituye acaso un progreso?

Reichenbach responde afirmativamente e intenta probar que la apreciación de una propuesta constituye un progreso en un sentido que falta por determinar. Para simplificar, supongamos que las probabilidades tomadas en consideración se definen en relación con parejas de series cuya primera componente es compacta. Se ha enumerado, en una sección de n términos, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la frecuencia de los B. Por aplicación de la regla de inducción, se concluye de ahí a la probabilidad de B. Para apreciar esta propuesta, nos vemos llevados a introducir la serie considerada en una serie de series idénticas. Se observarán así s secciones de series, compuestas cada una de n términos[38]. Los resultados se disponen en el cuadro siguiente, donde cada elemento representa B o $\sim B$:

$$\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{s1} & x_{s2} & \ldots & x_{sn} \end{array}$$

Supongamos el intervalo [0, 1] descompuesto en subintervalos $I_1, I_2, \ldots, I_p$, que constituyen una partición. Si en la primera serie horizontal la frecuencia pertenece a I_k, se propone que converge hacia un número que pertenece a este intervalo. Lo mismo se hace con las otras series. Llamamos primarias a estas propuestas. Se puede aplicar la regla de inducción a las propuestas primarias y, si $s_1, s_2, \ldots, s_p$ designan respectivamente el número de series horizontales cuya frecuencia pertenece a $I_1, I_2, \ldots, I_p$, se atribuirá el peso s_k/s a las propuestas del tipo $p \in I_k$. Este resultado se obtiene por la aplicación de la regla de inducción a la serie vertical de las propuestas, serie virtualmente infinita. Las propuestas así obtenidas son llamadas secundarias. Ahora bien, si se supone la convergencia de las series horizontales, se establece

[38] Esta última restricción no tiene nada de esencial. Su único fin es simplificar la exposición que sigue.

fácilmente el siguiente resultado: existe un entero n_1 tal que, si $n_1 \leqslant n$, las propuestas primarias son todas correctas, y existe un entero n_2 tal que, si $n_2 \leqslant n$, las propuestas secundarias son todas correctas y se tiene $n_1 \geqslant n_2$[39]. Según **Reichenbach**, este teorema "formula la superioridad de las propuestas secundarias con respecto a las propuestas primarias"[40]. Prueba que el paso a propuestas de nivel superior mejora la convergencia. De modo más general, se puede esperar una convergencia tanto más rápida cuanto más elevado es le nivel de las propuestas en las que nos detenemos.

Esta técnica, que consiste en medir la probabilidad de un enunciado obtenido por enumeración simple insertándolo en una serie de inducciones análogas, constituiría el paradigma de los métodos científicos. **Reichenbach** otorga una importancia capital a "la inducción en cruz": su uso basta para evitar ciertos errores a los que conduce la inducción simple. **Reichenbach** lo demuestra retomando el famoso ejemplo de la inducción errónea concerniente al color de los cisnes[41]. En lugar de considerar una sección inicial de la serie de los cisnes, serie teóricamente infinita, se puede considerar un retículo cuyas series horizontales están constituidas por recuentos de observación concernientes a los colores en las diversas especies animales. Cada serie horizontal está constituida por observaciones relativas a una especie y en ella se determina la frecuencia del color más frecuente. Se encuentra que esta frecuencia rara vez se aproxima a 1. En otros términos, el color es raramente característica de una especie. Por inducción vertical, se pueden ponderar las propuestas horizontales y nos veremos llevados a atribuir un peso muy débil al enunciado "Todos los cisnes son blancos". Así, justificando nuestra desconfianza con respecto a ciertas inducciones enumerativas, la inducción en cruz nos preserva de ciertos errores. ¿Quiere decir esto que basta para corregirlos? Es lo que sostiene **Reichenbach**, quien ve en este método "el esquema de los métodos científicos": "Considerando el peso obtenido, corregimos una propuesta primaria por una propuesta de peso más alto"[42]. Así,

---

[39] Cf. *T.P.*, § 90, pp. 466-467. Precisemos que la propuesta secundaria se dice correcta si, *en el conjunto de las s series tomadas en consideración,* la frecuencia de las que convergen en I_k es s_k/s. El teorema es entonces trivial. La existencia de n_1 se concluye de la hipótesis de convergencia. Si $n \geqslant n_1$, entonces todas las propuestas horizontales son verdaderas y, *a fortiori,* las propuestas secundarias. En cambio, las propuestas secundarias pueden ser verdaderas sin que lo sean todas las propuestas primarias. Ocurre de este modo si ciertas series no han alcanzado sus lugares de convergencia pero se compensan los errores cometidos en las inducciones horizontales. Añadamos que si se consideran, no s series, sino una infinidad de series horizontales y si se exige de las propuestas secundarias, para que sean estimadas como verdaderas, que correspondan a los límites de las frecuencias en esta serie infinita (límites cuya existencia hay que suponer), se puede establecer que existe s_3 y n_3 tales que, si $s \geqslant s_3$ y $n \geqslant n_3$, entonces todas las propuestas primarias y secundarias son verdaderas. Pero *no se tiene* $n_3 \leqslant n_1$.

[40] *Ibid.*, § 90, p. 467.

[41] De hecho, en el sistema de **Reichenbach** no se pueden hacer propuestas jamás sobre $f = 1$ sino solamente sobre $f \geqslant 1 - \epsilon$. Además, $f = 1$ no es equivalente a "todos los A son B"; implica sólo que, en una serie infinita de A, el número de los $\sim B$ es finito.

[42] *F.L.P.*, § 19.

"anulamos una inferencia inductiva individual por medio de una inducción en cruz"[43]. En el ejemplo citado anteriormente, no sólo se atribuye un débil peso al enunciado "Todos los cisnes son blancos", sino que se lo corrige y se afirma que todos los cisnes no son blancos. Un ejemplo presentado en *Experience and Prediction*[44] muestra claramente que es así como entiende **Reichenbach** el uso del método de inducción en cruz.

En el caso en que las series observadas fueran normales, pueden obtenerse resultados más fuertes. Pero, ¿cómo asegurarse de la normalidad de una serie a partir de la observación de una sección finita? Basta, responde **Reichenbach**, con formar series parciales alineadas en un orden de enumeración determinado, realizando selecciones por medio de grupos de predecesores cada vez más largos y de divisiones regulares. A partir de estas series, se constituye un retículo bidimensional y se aplica la regla de inducción. Designemos por N la propiedad de una serie parcial que coincide con la probabilidad de la serie principal, con un intervalo de exactitud aproximadamente. Por inducción vertical, se determina la probabilidad de que todas las series parciales de los tipos considerados tengan la propiedad N; dicho de otra manera, la probabilidad de que la serie sea normal[45]. Cierto que el enunciado obtenido es sólo una propuesta ciega, pero nada excluye que se determine su peso.

Establecida la normalidad de una serie, se podrá, por ejemplo, calcular la probabilidad de obtener una frecuencia determinada en una prolongación de la serie de longitud dada y se sabe que esas probabilidades son a menudo muy próximas a 1. Pero, sobre todo, se puede justificar la acumulación de las observaciones. Por regla general, la convergencia de la frecuencia en una serie no autoriza de ningún modo a concluir que $|f_{n_1} - f_\infty| \leqslant |f_{n_2} - f_\infty|$ si $n_1 \geqslant n_2$. No es posible siquiera establecer una relación de este tipo en probabilidad. Se sigue de ahí que nada prueba que la estimación de una probabilidad sea tanto mejor si se ha obtenido a partir de la observación de una sección más larga. Sin embargo, lo mínimo que se tiene derecho a exigir de una lógica inductiva es un enunciado que establezca que la probabilidad de que una propuesta primaria sea verdadera crece con el número de observaciones utilizadas. Pero, precisamente, este resultado se puede establecer en el caso de las series de **Bernouilli**[46]. Sea $v_n(f, p_1, p_2)$ la probabilidad de que la probabilidad p de una serie esté en el intervalo p_1, p_2 en cuanto se ha observado, en una sección de n términos, la frecuencia f. Si la serie es bernouilliana, se puede establecer que $\lim_{n \to \infty} v_n = 1$ si $f \in]p_1, p_2[$. Eso no es sino una versión debilitada del teorema de **Bernouilli** invertido, que se mantiene válido sean cuales sean las probabilidades antecedentes de los diversos valores posibles de p. Este teorema "sólo presupone el carácter bernouillia-

[43] *T.P.*, § 84, p. 430.
[44] *E.P.*, § 41, pp. 365-367.
[45] *T.P.*, § 89, pp. 463-464.
[46] Es bernouilliana una serie para la cual es verdadero el teorema de **Bernouilli.** Todas las series normales son bernouillianas, sin que la recíproca sea verdadera.

no de la serie" y **Reichenbach** precisa que "podemos inferir que cuanto más grande es n, tanto más grande es la probabilidad v_n de que la frecuencia observada represente la probabilidad p en el intervalo de exactitud $\pm \delta$; y v_n tiende hacia 1 cuando n crece"[47]. Así, en las series normales, el peso de las propuestas es función creciente del número de observaciones.

Por último, cuando las series son normales, se puede dar una forma rigurosa al método de corrección de las pruebas por inducción en cruz. La inducción vertical de la probabilidad da los diversos valores de la probabilidad en las series horizontales. En posesión de un equivalente de las probabilidades *a priori* de la teoría clásica, se puede invertir el teorema de **Bernouilli** y determinar, para cada serie horizontal, la probabilidad de que tenga un valor determinado, siendo, naturalmente, esta probabilidad función de la frecuencia que se haya observado allí. Circunstancialmente, se retendrá, para cada serie, la propuesta que tenga la probabilidad más fuerte. Así, el método rudimentario de inducción en cruz, que consiste en rechazar las propuestas de peso demasiado débil, se sustituye por un procedimiento de corrección mucho más refinado, pero cuya aplicación supone la normalidad de las series horizontales.

Al conocimiento primitivo, en el que nos limitamos a la aplicación de la regla de inducción enumerativa, se opone, por tanto, el conocimiento avanzado, en el que combinamos esas inducciones utilizando los teoremas del cálculo de probabilidades. El "éxito de la inducción –escribe **Reichenbach**– se basa en un método que combina varias inferencias inductivas en una red de inducción"[48]. En efecto, se establecería demostrativamente que el paso de un estado de conocimiento al otro constituye un progreso: "El sistema, tomado en bloque, conducirá al éxito más pronto que una inducción aislada y puede llevar al éxito incluso si fracasan ciertas inducciones particulares. Esta diferencia lógica, esta superioridad de la red de inducciones encadenadas sobre las inducciones aisladas, puede demostrarse por consideraciones puramente matemáticas: de este modo, nuestra preferencia por el sistema de inducciones puede justificarse sin ninguna apelación a presuposiciones concernientes a la naturaleza."[49] El cálculo de probabilidades da cuenta, en este sentido, de los métodos complejos utilizados en la constitución del conocimiento experimental.

4. La probabilidad de las hipótesis científicas

Suponiendo que sea aceptable la doctrina que acabamos de presentar, su alcance es aún demasiado limitado para que se tenga derecho a pretender que justifica el conocimiento experimental. Para que sea posible la aplicación de la regla de inducción, también es preciso que la observación baste para enumerar efectivamente fre-

[47] *T.P.*, § 62, p. 329.
[48] *T.P.*, § 84, p. 431 y *E.P.*, § 34, p. 316.
[49] *E.P.*, § 43, pp. 400-401.

cuencias: clases y términos considerados deben pertenecer al lenguaje de observación; lo mismo ocurre con las proposiciones cuyo peso se determina. La composición de las inducciones no nos hará salir de ese estrecho marco: permitirá aseverar probabilidades de cualquier nivel pero que, en definitiva, se refieran a proposiciones de observación. Ahora bien, el propio **Reichenbach** ha insistido en el hecho de que toda inducción no se reduce a una generalización empírica. Ha puesto el acento sobre la originalidad de esas inducciones que denomina explicativas y cuyas conclusiones se expresan bajo la forma de enunciados del lenguaje teórico, que no son lógicamente equivalentes a enunciados del lenguaje de observación. De hecho, la teoría que acaba de exponerse no parece aplicarse a las inducciones explicativas.

Según **Reichenbach**, esta conclusión sería errónea. El método de determinación de las probabilidades inductivas que se ha propuesto se aplicaría a toda hipótesis y así "la inducción explicativa puede constituirse en términos de teoremas del cálculo de probabilidades y es, por tanto, reductible a la inducción enumerativa"[50]. ¿Cómo justificar esta sorprendente afirmación?

La reducción de toda inferencia inductiva a una combinación de inducciones enumerativas está asegurada por el hecho de que "las inferencias inductivas del procedimiento de tests de una hipótesis son, en último análisis, reductibles a la inducción por enumeración"[51]. En otros términos, aun cuando una proposición del lenguaje teórico no sea equivalente a una clase de proposiciones del lenguaje de observación, es posible, no obstante, cuando se trata de determinar su probabilidad, identificarla con la clase de sus consecuencias, que pertenecen al lenguaje de observación. Supongamos efectuado un cierto número de observaciones que constituyen otros tantos tests de la hipótesis. Se considera a esas observaciones como una sección finita de la serie infinita de las pruebas posibles. La probabilidad de la hipótesis se confundirá con la frecuencia-límite de las pruebas que la hipótesis soporta con éxito y se determinará por una simple aplicación de la regla de inducción. Tal es el primer método para calcular la probabilidad de cualquier hipótesis teórica; se propone la proposición siguiente: "la probabilidad de la hipótesis es igual, con un intervalo de exactitud aproximadamente, al porcentaje de pruebas que ha soportado con éxito".

Pero, para determinar la probabilidad de una hipótesis, es posible utilizar métodos más refinados, que corresponden a los procedimientos de corrección de las propuestas que hemos descrito ya. Calculemos la probabilidad de la ley de atracción de **Newton**[52]. En lugar de considerar simplemente la serie de las verificaciones efectuadas, se puede constituir un fragmento de retículo, correspondiendo cada línea a un tipo de verificaciones determinado. Se aplica la regla de inducción a cada línea; luego, por inducción vertical, se determina la probabilidad de que todas las líneas

[50] *T.P.*, § 85, p. 434.
[51] *T.P.*, § 84, p. 434.
[52] *T.P.*, § 85, pp. 438-439.

den una frecuencia de tests positivos igual a 1 o muy próxima a 1. Esta probabilidad de segundo nivel es la probabilidad de que cualquier tipo de verificación de la ley de **Newton** no la invalide prácticamente jamás[53]. Se la tomará como probabilidad de esta ley.

El estudio de esos procedimientos utilizados para determinar la probabilidad de las hipótesis teóricas permite constituir una metodología de las ciencias experimentales plenamente satisfactoria. En particular, ciertos métodos de uso corriente reciben una justificación en la medida en que se puede demostrar que sirven para acrecentar la probabilidad de las hipótesis. **Reichenbach** brinda dos ejemplos de este hecho. En el retículo constituido para calcular la probabilidad de la ley de **Newton**, la frecuencia de una línea no converge hacia 1; se trata, naturalmente, de la línea que corresponde a las verificaciones efectuadas sobre movimiento de Mercurio. La inducción primaria lleva a proponer el enunciado: "el movimiento de Mercurio no obedece a la ley de **Newton**". Pero la inducción secundaria no atribuye a esta propuesta más que un peso muy débil. Para comprobar esta propuesta, se prolongará la serie de observaciones relativas al movimiento de Mercurio; constatando que la divergencia permanece, para acrecentar la probabilidad de la ley de **Newton**, probabilidad de segundo nivel, se separará el caso del planeta Mercurio, es decir, se formulará esta ley de tal manera que no se aplique al movimiento de este planeta.

En cambio, para acrecentar la probabilidad de una hipótesis procede darle una formulación tan general como sea posible. Lo que explica que se tenga por una ventaja el descubrimiento de una ley general que comprenda entre sus consecuencias leyes particulares admitidas anteriormente. No es que nos aproximemos así al descubrimiento de la "causa" de los fenómenos, sino que el incremento de la generalidad implica un crecimiento de la probabilidad. Consideremos las dos leyes de **Kepler** y de **Galileo**.

Para determinar la probabilidad de cada una de ellas, se puede constituir un retículo según el procedimiento que hemos expuesto más arriba. Sus probabilidades respectivas de segundo nivel se determinarán por inducción vertical, recayendo esas inducciones respectivamente sobre s_1 y s_2 líneas. El descubrimiento de la ley de **Newton**, aun cuando no tuviera otra consecuencia que estas dos leyes, permite reunir los dos retículos en uno solo. Su probabilidad se determinará por una inducción vertical que recaiga sobre $s_1 + s_2$ líneas. Procediendo de una inducción efectuada sobre una sección más larga, la propuesta "la ley de Newton es verdadera" tiene un peso más elevado que las propuestas del mismo tipo que atañen a las dos leyes, de **Kepler** y de **Galileo**. Aquí, la aportación de la lógica probabilitaria es esencial: "la inducción en cruz explica que, al unificar dos teorías, se acreciente su probabili-

[53] Decimos "prácticamente jamás" y no "jamás" porque no se pueden excluir algunos casos en que la ley será refutada en razón de errores de observación. Además, la regla de inducción no permite afirmar, en ningún caso, que una frecuencia es rigurosamente igual a 1.

dad; algo "respecto a lo que la lógica y la epistemología clásicas no podían proporcionar ninguna razón"[54].

Asimismo se justifica el principio que pide que se elijan tipos de verificación tan variados como sea posible, dado que el descubrimiento de un nuevo tipo de verificación se convierte en la adición de una nueva línea al retículo y acrecienta por tanto el peso de la propuesta primaria.

Sin embargo este procedimiento, que lleva a acrecentar la probabilidad de una hipótesis ampliando o restringiendo su campo de aplicación, puede parecer sospechoso en la medida en que deja sitio a lo arbitrario. ¿No es acaso posible reunir artificilmente generalizaciones empíricas en una fórmula única, aunque sólo sea tomando su disyunción como fórmula general? ¿Quiere decir esto que un incremento de probabilidad puede resultar de una simple manipulación de escritura?

Para evitar la introducción de seudo-generalizaciones de este tipo, **Reichenbach** otorga un privilegio a las leyes simples. ¿Acepta el principio "simplicitas sigillum veri"? En módo alguno; la simplicidad se describe en términos de interpretación lineal y su búsqueda se justifica a partir de esta descripción. Si sobre una gráfica se juntan los puntos representativos de las observaciones mediante segmentos de recta, se tiene la certeza de que, reiterando este procedimiento cuando crece el número de observaciones, se corregirá progresivamente la gráfica primitiva. El método de interpolación lineal se justifica así a título de método autocorrectivo[55]. Sin embargo, se sabe que prevalece el uso de trazar, no una línea quebrada, sino una curva que una los puntos observados. Este método se justifica desde el momento en que se toma en consideración no la sola gráfica que enlaza dos magnitudes físicas sino el conjunto de las gráficas, virtualmente infinito, que enlazan las derivadas sucesivas de una con relación a la otra: consiste en proceder a una interpolación lineal simultánea para todas esas curvas representativas. Así, la simplicidad se describe en términos de curvas planas (smooth curves)[56]. Ceñirse a generalizaciones que son simples, en el sentido que acaba de ser definido, es un principio metodológico obvio y que acrecienta la probabilidad de una ley. La ley de **Newton** es simple en este sentido y esta simplicidad, calificada como inductiva por **Reichenbach**, le confiere "buenas cualidades en materia de predicción"[57]. Debe sus cualidades[58] a su estatuto de "interpolación lineal" de los datos de observación, por oposición a las fórmulas que suponen una extrapolación, operación siempre arriesgada. Parece que, a los ojos de **Reichenbach**, estas consideraciones resuelven plenamente el problema suscitado en el párrafo precedente.

Pero, para determinar la probabilidad de una hipótesis, hay un método distinto

---

[54] *E.P.*, § 41, p. 373.
[55] Veremos más adelante que la regla de inducción se justifica de la misma manera.
[56] *E.P.*, § 42, pp. 373-387.
[57] *Ibid.*, p. 374.
[58] *Ibid.*, p. 385-386.

del que acabamos de escribir. Consiste en constituir una clase de hipótesis y en determinar la frecuencia de las hipótesis verdaderas en esta clase. Así, para determinar la probabilidad de la teoría cuántica, se la considerará "como un elemento en la multiplicidad de teorías producidas por los físicos y se buscará la proporción de las teorías coronadas por el éxito en esta multiplicidad"[59]. Circunstancialmente, procederá limitarse a las hipótesis de un tipo determinado (que tengan una extensión comparable, el mismo nivel de elaboración formal, etc.) y distinguir, en un conjunto teórico, diversas partes que tengan probabilidades distintas. Se objetará que este cálculo ofrece dificultades, sobre todo si queremos ceñirnos a un conjunto de hipótesis "homogéneo". Pero estas dificultades son las mismas que se encuentran cuando se quiere determinar la probabilidad de un enunciado, cualquiera que sea, que pertenezca al lenguaje de observación, y es fácil superarlas[60]. En consecuencia, concluye **Reichenbach**, sería erróneo suponer que su concepción carece de toda base práctica.

Naturalmente, este método lleva a atribuir a una hipótesis una probabilidad que es, en general, distinta de la que le da el cómputo de la proporción de tests positivos. Pero no hay ahí ninguna contradicción. Este último método conduce a determinar una probabilidad de nivel más elevado. Observemos, por otra parte, que su aplicación supone que se ha utilizado primero el otro método para reconocer las hipótesis que se tiene derecho a estimar como verdaderas; en otros términos, aquéllas que tienen una probabilidad muy próxima a 1[61].

Así, la teoría frecuencial de la probabilidad y el uso de la regla de inducción enumerativa darían a luz una lógica inductiva cuyo campo de aplicación es ilimitado y que permite reconocer siempre la propuesta más probable. Se constituiría, por último, una metodología coherente que legitima los procedimientos por los que mejoramos nuestras técnicas de predicción. La especificidad de la inducción explicativa no impide que se dé un sentido frecuencial a la probabilidad inductiva y, por múltiples que sean los tipos de inducción utilizados en la ciencia, cuando se trata de calcular la probabilidad de sus conclusiones, esas inducciones pueden estimarse como un encadenamiento de enumeraciones: "Todas las inferencias inductivas que

[59] *E.P.*, § 43, p. 397.

[60] La exigencia de limitarse a clases homogéneas se confunde, por otra parte, con el principio que pide que se tome como clase de referencia la clase más pequeña para la que se dispone de estadísticos dignos de confianza. El problema de la homogeneidad de las clases es el mismo, se trate de determinar la probabilidad de una teoría científica o la probabilidad de un enunciado del lenguaje de observación. Una clase se estimará como homogénea cuando se ignora cómo restringirla en el momento en que se la toma como clase de referencia. Es decir, la homogeneidad depende del estado de conocimiento y no es un carácter propio de la clase. El progreso del conocimiento, obtenido por tanteos, consiste en mostrar cómo pueden descomponerse clases tenidas por homogéneas, de tal manera que las estimaciones de probabilidad obtenidas en esta descomposición sean diferentes.

[61] Lo que no significa, como pretende **Nagel** (*P.S.T.*, § 8), que la existencia del primer método haga inútil al otro. Siempre hay ventajas en determinar una propuesta de nivel más alto.

no tienen la forma de la inducción por enumeración deben construirse en términos de teoremas del cálculo de probabilidades –escribe **Reichenbach**–... Todas las cuestiones que conciernen a la inducción en el conocimiento avanzado, reciben una respuesta en el cálculo de probabilidades"[62].

[62] *T.P.*, § 84, p. 432.

CAPITULO VII

LA CONCEPCION FRECUENCIAL DE LA PROBABILIDAD Y LA LOGICA INDUCTIVA (EXAMEN CRITICO DEL SISTEMA DE REICHENBACH)

El punto débil de la mayoría de los sistemas de lógica inductiva radica en su extrema limitación. De esta limitación resulta su ineptitud para aportar una contribución real a la solución de los problemas que conciernen a la epistemología del conocimiento inductivo. No ocurre esto con el sistema de **Reichenbach.** Permite determinar la probabilidad de cualquier hipótesis, sea cual sea su forma, e incluye una teoría del progreso de la inducción que, si se cree a su autor, recobra y justifica todas las reglas tradicionales de la metodología inductiva. Pero no se puede juzgar un sistema de lógica inductiva exclusivamente por su extensión. Antes es preciso que satisfaga requisitos de otra naturaleza. Se puede exigir, en primer lugar, que conduzca a resultados coherentes con ciertas exigencias intuitivas cuya naturaleza hemos intentado determianr anteriormente. De manera más elemental, se pedirá que sea no contradictorio, pudiendo introducirse la contradicción por el equívoco de ciertas reglas que autorizarían la asignación simultánea de probabilidades distintas a una misma hipótesis en las mismas circunstancias.

Nada asegura que el sistema de **Reichenbach** esté en condiciones de superar con éxito un examen de este tipo. Hay incluso una razón que lo hace particularmente sospechoso: radica en la desproporción entre el aparato matemático construido, del cual ha dado una idea muy débil nuestra exposición, y los resultados efectivamente utilizados. **Reichenbach** pretende que la existencia de la lógica inductiva depende enteramente de la definición frecuencial de la probabilidad y de un instrumento matemático habilitado para el tratamiento de esta definición. Los teoremas formales contendrían virtualmente toda una teoría del progreso de la inducción en la medida en que enseñarían cómo pueden combinarse las inducciones enumerativas elementales para mejorar sus resultados. Pero, en realidad, los teoremas empleados son poco numerosos; extremadamente pobres, se reducen a algunos resultados triviales que enuncian verdades aritméticas elementales. En particular, la teoría del orden de las series no juega sino un papel enteramente subordinado, cuando es ella la que distingue los formalismos que explotan la definición frecuencial de la probabilidad. En estas condiciones, se tiene derecho a preguntar si la utilización de una teoría matemática compleja juega un papel esencial en la doctrina de **Reichenbach,** o si no es más que un simple indumento exterior destinado a enmascarar la radical

pobreza de los datos sobre los que **Reichenbach** intenta fundar su teoría del conocimiento experimental. Si fuera necesario detenerse en la segunda circunstancia, habría buenas razones para poner en cuestión la solidez del edificio. La posibilidad de reducir toda inducción a una combinación de enumeraciones es, por lo menos, dudosa. La única razón que podría disipar la duda radica en la riqueza del instrumento matemático utilizado para efectuar esas combinaciones. Si esta riqueza es sólo ilusoria, la verosimilitud del proyecto de **Reichenbach** desaparece.

Por supuesto, el argumento invocado no tiene nada de decisivo y se impone un examen profundo para comprobar su validez. Creemos que, efectivamente, estamos en condiciones de establecer que la teoría del progreso de la inducción propuesta por **Reichenbach** no resiste el examen y que es imposible reducir toda inferencia inductiva a un encadenamiento de enumeraciones. Pero nuestra crítica sería superficial si no pusiera en evidencia el origen del error de **Reichenbach** que reside en su concepción unitarista de la probabilidad y en su voluntad de utilizar la definición frecuencial en lógica inductiva. Ahora bien, ese proyecto exigía una ampliación de esta definición que debía necesariamente naufragar en el equívoco.

1. La definición de la probabilidad y sus incertezas

Reichenbach propone una definición de la probabilidad que se presenta como una simple elaboración de la definición frecuencial utilizada por los matemáticos: consiste en introducir una operación lógica –la implicación probable– a partir de un cuadruplete compuesto de dos series coordinadas de constantes individuales y de dos clases. Esta definición primitiva sufre, ulteriormente, diversas transformaciones cuyo objetivo explícito es autorizar la reducción de todo enunciado de probabilidad a un enunciado frecuencial: se introducen primeramente las notaciones en que sólo figuran símbolos de clases y no símbolos de series; luego, se define el concepto de probabilidad de un suceso singular. Al mismo tiempo, el paso a la interpretación lógica permite hablar de probabilidad de series proposicionales y, en definitiva, de la probabilidad de una proposición aislada. El problema que se plantea es saber si esas modificiaciones sucesivas, indispensables para la constitución de una lógica inductiva frecuencial, son legítimas o si introducen equívocos, o hasta contradicciones, en la noción de probabilidad.

De hecho, el paso de la lengua a la metalengua es el que plantea menor problema y el que no podría ser discutido. Por eso centraremos nuestra crítica en dos puntos:

1° La introducción de la definición de la probabilidad en términos de clases, y no de series.

2° La definición de la probabilidad del suceso singular.

Como vamos a ver, uno y otro ocultan graves dificultades. Toda la teoría de **Reichenbach** está construida suponiendo que una pareja de clases determina circunstancialmente una probabilidad. La propia noción de clase tiene un estatuto

lógico bastante mal determinado dado que, según los casos, se puede tratar de clases de objetos observables definidos por una propiedad de observación, de clases de proposiciones consecuencias de una hipótesis, de clases de hipótesis o de teorías, o hasta de clases de uno de los tipos precedentes y de cualquier nivel. Además, no se sabe qué axiomas satisfacen esas clases multiformes. Pero dejemos de lado esta dificultad. La cuestión es saber si dos clases definen una probabilidad; dicho de otra manera, si la transición de la fórmula (1) a las fórmulas (2) y (3) del capítulo VI es legítima.

Para simplificar el problema, supongamos identificadas las series (x_n) e (y_n); compacta, la serie (x_n); y, además, supongamos que B es una sub-clase de A. ¿Quiere decir esto que los enunciados (1) y (2) son equivalentes? En modo alguno. **Reichenbach** da al enunciado (1) una significación perfectamente determinada: el grado de la implicación probable es el límite hacia el que tiende la frecuencia de los (x_n) que pertenecen a B, suponiendo que esta frecuencia converge. El enunciado (2), en cambio, no recibe ninguna significación precisa. Cierto que se presenta como una simple abreviación del precedente y se proponen reglas para restablecer los símbolos de series. Pero esas reglas no hacen más que especificar cuáles son las series que deben identificarse y no bastan para resolver los problemas que suscita el uso de esta notación. En realidad, **Reichenbach** procede como si la fórmula (2) tuviera una significación primitiva, como si el hecho de darse dos clases bastara para determinar una probabilidad que se ha identificado con una frecuencia. En otros términos, supone implícitamente que la frecuencia-límite de los términos que son B en una serie de elementos de A es constante, cualquiera que sea la serie considerada.

Si la clase A fuera finita, suponiendo que toda serie necesariamente finita agota la clase A, la hipótesis hecha se verificaría. Pero un caso tal, de poco interés, es excluido manifiestamente por **Reichenbach**, quien sabe que toda teoría de la inducción debe tratar necesariamente de clases infinitas, aunque sólo sea porque los axiomas de orden no se verifican sino para series infinitas. Ahora bien, en todos los otros casos, la hipótesis es de una falsedad evidente. Para convencerse de ello, basta con constatar que, disponiendo en un orden adecuado los términos de una serie de A en la que la frecuencia-límite de los B no es ni nula ni igual a 1, se puede dar un valor cualquiera a esa frecuencia-límite. Por ejemplo, la frecuencia de los primeros números en la *clase* de los enteros depende del orden en el que se enumeren los enteros, como hace notar **Russell**[1]. En rigor, la expresión "frecuencia de los primeros números en la *clase* de los enteros" no tiene sentido. **Russell** concluye de ahí, con buen juicio, que la definición frecuencial de la probabilidad no tiene significación si se la aplica a clases de las que no se asegura que son finitas.

Cierto que un principio que determinara el orden en el que deben ser elegidos los elementos de A salvaría la definición de **Reichenbach**. Así, damos un sentido a la expresión "frecuencia de los primeros números de la clase de los enteros", aunque

[1] *H.K.*, P. 5, cap. 5, p. 384.

sea incorrecta, pues pensamos inmediatamente que los enteros están tomados en el orden natural. Pero, ¿cuál puede ser ese principio, si se quiere que sea de aplicación general? ¿Es preciso decir que los términos de la clase se eligen al azar, que se toma en consideración una serie de elementos de A obtenida por sorteo? En la teoría clásica de probabilidades, se puede mostrar que la frecuencia converge hacia el mismo límite en todas las series obtenidas por sorteo. Pero esta solución es inaceptable en el sistema de **Reichenbach**: los conceptos de elemento obtenido por sorteo, de serie aleatoria, no tienen sentido y la demostración que acabamos de evocar es imposible, en tanto no se consiga la definición de la probabilidad. Falta por decir que el orden de las series es el orden temporal de las observaciones[2]. Solución poco satisfactoria por dos razones distintas: ante todo, no se prueba que la probabilidad relativa a dos clases será independiente del procedimiento utilizado para elegir los elementos observados; después, la definición remitirá a un proceso temporal y mundano, lo que excluye que la teoría de la probabilidad sea "una rama de la lógica" y exige que se la tenga por "una parte del estudio de la naturaleza". Como hace notar **Russell**, esto es contrario al punto de vista de **Reichenbach** quien "debería, por tanto, ser apto para establecer lo que es fundamental en la teoría de la probabilidad sin introducir caracteres accidentales del mundo actual, tales como el tiempo"[3].

Si se sigue el uso que hace **Reichenbach** de la noción de probabilidad, es innegable que procede como si una pareja de clases bastara para determinar una probabilidad. No se enuncia ningún principio riguroso que rija el orden de elección de los términos y permita el paso de las clases a las series. Se sigue de ahí que la definición de probabilidad sobre la que reposa todo el sistema es, por lo menos, imprecisa. Pero la imprecisión va a acrecentarse si se toma en consideración la noción de probabilidad de un suceso singular. Esta noción se introduce a partir del concepto de probabilidad definido por una pareja de clases[4]; padece pues de las insuficiencias que acabamos de hacer notar. Pero van a surgir otras dificultades.

La noción de probabilidad tiene únicamente un sentido ficticio y derivado cuando se aplica a un suceso singular, o mejor, a una pareja de sucesos singulares. Un mismo suceso, por ejemplo la muerte de un individuo determinado en un plazo dado, tendrá probabilidades diferentes según la clase a la que se refiera (clase de los individuos de la misma edad, del mismo estado de salud, etc...). **Reichenbach** pide que se tome como clase de referencia "la clase más pequeña para la que puedan

---

[2] **Reichenbach** es poco explícito sobre este punto. Pero, cuando hace notar que la probabilidad no se define sino a reserva de que los elementos de una clase estén dados en un orden determinado, añade "por ejemplo, en el orden temporal" (*T.P.*, § 9, p. 46). Señalemos que ha reconocido implícitamente, por otra parte, que un enunciado de probabilidad supone siempre no sólo una clase, sino un orden (*en C.I.*, en respuesta a una objección de **Halbwachs**).

[3] *H.K.*, P. 5, cap. 5, p. 385.

[4] En este momento particular del desarrollo; **Reichenbach** habla de parejas de series. Pero, al no ser propuesta ninguna prescripción que rija el orden de elección de los términos, esa definición carece de eficacia. De hecho, **Reichenbach** procede como si el hecho de darse las clases bastara para definir una probabilidad.

reunirse estadísticos dignos de confianza". Pero este principio no se justifica de ningún modo. Por supuesto, **Reichenbach** pretende mostrar que una elección semejante mejora las previsiones. Pero la demostración que esboza es enteramente inaceptable: su sistema no permite en absoluto establecer que una propuesta tenga un peso tanto más elevado cuanto que la clase de referencia se defina por un número mayor de caracteres[5]. El único motivo que inclina a la adopción de este principio es la necesidad en que nos encontramos de eliminar la indeterminación en la asignación de la probabilidad de un suceso singular, de efectuar la elección, entre todas las probabilidades posibles, de la que será tomada como "guía de acción"[6].

Ahora bien, aun cuando se admitiera ese principio, la verdad obliga a decir que no puede jugar el papel que se quiere hacerle jugar. La voluntad de tomar una clase de referencia teniendo en cuenta todos los caracteres relevantes –y, en ausencia de indicaciones contrarias, no se puede excluir que un carácter cualquiera sea relevante– conduce virtualmente a limitar la clase de referencia al solo suceso considerado, como hacía notar **Borel**[7]. Lo propio de la definición frecuencial de la probabilidad del suceso singular es que se contradice desde el momento en que se vincula a un precepto que manda restringir la clase de referencia, dado que lleva a una situación en la que no hay ni frecuencia.

Incluso si se estima la argumentación que acabamos de apuntar como verbal y retórica, se debe reconocer que el uso del principio propuesto por **Reichenbach** aboca a dificultades considerables. ¿Qué es un estadístico digno de confianza? ¿Sobre cuántos términos debe recaer? ¿Está establecido, pues, que una propuesta es tanto mejor cuanto que se ha obtenido a partir de un recuento de frecuencia que recae sobre una sección más larga o que, en la clase de referencia, se tienen en cuenta más caracteres? ¿Cómo elegir entre dos estimaciones de probabilidad, obtenida la

---

[5] Cf. *E.P.*, § 34, p. 317. "Cuanto más restringida es la clase, tanto mejor es la determinación del peso". Esto debe justificarse por la interpretación frecuencial, dado que el número de predicciones coronadas de éxito será mayor si se elige la clase más pequeña de la que se disponga. Pero la demostración propuesta es débil. Consiste simplemente en esto: "Sea A una clase en la que el suceso B se espere con la probabilidad 1/2; entonces, si apostamos sobre B, el 50 por 100 de las apuestas aciertan. Ahora, supongamos a A dividida en dos clases A_1 y A_2; en A_1, B tiene una probabilidad de 1/4, en A_2 de 3/4. Formamos apuestas diferentes según que x pertenezca a A_1 o a A_2. Se obtendrá un 75 por 100 de éxito".

Está claro que esta justificación es insuficiente:

1° Sólo atañe a la tasa de éxitos en una serie infinita de apuestas. No dice nada sobre la tasa de éxitos en una serie finita; por otra parte, toda conclusión al respecto exigiría conocer el orden de las series.

2° **Reichenbach** supone implícitamente que las determinaciones de la probabilidad de B en A, A_1, A_2, son exactas, cuando, obtenidas por la regla de inducción, no son más que propuestas. Dividiendo la clase A en dos subclases, es posible que se obtengan propuestas de menor probabilidad. Aquí se hace sentir cruelmente la ausencia de una teoría concerniente a la probabilidad de una propuesta en función de la longitud del recuento de frecuencia sobre el que reposa.

[6] *H.K.*, P. 5, cap. 1, p. 358.

[7] *T.C.P.*, T. 4, fasc. 3, cap. 5, § 49.

una a partir de un recuento estadístico restringido, pero que tiene en cuenta múltiples caracteres de la clase de referencia, y obtenida la otra a partir de un recuento más largo pero que tiene en cuenta menos caracteres? Se buscaría en vano una respuesta a estas cuestiones en la obra de **Reichenbach**. Es decir, el concepto de probabilidad del suceso singular y, por tanto, de probabilidad de una proposición, no recibe ninguna definición satisfactoria en su sistema.

Así, los fundamentos lógicos de la doctrina de **Reichenbach** no tienen ni la claridad ni la precisión que se tiene derecho a requerir. La aplicación de la definición frecuencial a la constitución de una lógica inductiva no se adquiere sino al precio de transiciones, de deslizamientos de sentido, cuya legitimidad plantea problemas. Pero se podría evocar, en respuesta a nuestras objeciones, la posibilidad de volver a poner el sistema sobre sus pies, tarea a la que no nos aventuraremos. Por eso, habiendo descubierto las razones de su debilidad, nos es necesario mostrar que, efectivamente, no cumple sus promesas.

2. El progreso de la inducción y de la teoría matemática de probabilidades

La teoría del progreso de la inducción, del avance del conocimiento, es la pieza maestra de la doctrina de **Reichenbach**. Intenta mostrar cómo el cálculo de probabilidades nos enseña a encadenar las inducciones enumerativas de tal manera que nuestras propuestas mejoran. Probaría que "el éxito de la inducción se basa en un método que combina varias inferencias inductivas en una red de inducciones"[8]. Suponiendo que esta teoría se ponga en cuestión, el conjunto del sistema se derrumbaría. Ciñámonos a las tesis esenciales y establecidas con la mayor nitidez:

1° **Reichenbach** intenta probar que el paso de las propuestas primarias a las propuestas secundarias, o de manera más general, la transición a propuestas de nivel más elevado es ventajosa en el sentido de que las propuestas secundarias tienen un peso más elevado que las propuestas primarias.

2° Presenta el método de inducción en cruz como un procedimiento de corrección que constituye "el esquema de los métodos científicos"[9].

3° Pretende justificar, mediante el uso de la inducción en cruz, la regla tradicional que dispone que se intente dar a los enunciados científicos la extensión máxima de que son capaces, que se trate de subsumir las leyes existentes bajo leyes más generales. La justificación de esta regla residiría en el hecho de que una hipótesis científica sería tanto más probable cuanto más general fuera.

Como vamos a ver, es fácil demostrar que ninguna de estas tesis, elementales y fundamentales sin embargo, puede ser aceptada.

[8] *T.P.*, § 84, p. 431 y *E.P.*, § 34, p. 316.
[9] *F.L.P.*, § 19.

La primera tesis se establecería por medio de la demostración de un teorema al que **Reichenbach** atribuye, de modo visible, una importancia capital. Ese teorema, que hemos presentado anteriormente y a cuya exposición nos remitimos[10], probaría "la superioridad de las propuestas secundarias sobre las propuestas primarias". En suma, enuncia que "las propuestas secundarias son independientes de las propuestas primarias", que "la transición a las propuestas secundarias hace posible una convergencia mejor"[11]. Pero, ¿qué ocurre de hecho? El teorema, trivial, como hemos dicho, no establece una comparación entre una propuesta primaria y una propuesta secundaria sino entre dos enunciados del mismo nivel, de los cuales uno implica al otro. En efecto, es posible parafrasearlo de este modo: sea una partición $I_1, I_2, \ldots, I_p$ del intervalo [0, 1] y un conjunto finito de s secciones de series. Sean las s enunciadas de la forma "la probabilidad de la i-ésima serie pertenece al intervalo I_{n_i}". s_k será el número de los enunciados de este tipo que afirman que la probabilidad pertenece al intervalo I_k. Consideremos, por una parte, la conjunción de estos enunciados, designados por h, y por otra parte, la proposición h' siguiente: "La proporción de las series cuya probabilidad pertenece al intervalo I_k es s_k/s." Si h es verdadera, también lo es h'. Tal es el contenido del teorema en cuestión, que resulta inmediatamente del hecho de que h implica a h'. Está claro que la proposición simbolizada por h' no designa de ningún modo una propuesta secundaria, sino que concierne a una frecuencia *finita* de probabilidades; ha de ponerse en el mismo plano que las propuestas primarias.

De hecho, el resultado que probaría la superioridad de las propuestas secundarias sería de naturaleza distinta. Sea una serie finita de secciones compuestas de n términos. Consideremos esta serie como un fragmento de retículo bidimensional. Comparemos las propuestas primarias obtenidas por aplicación simple de la regla de inducción a las secciones y las propuestas secundarias concernientes a la probabilidad de que una serie horizontal tenga su probabilidad en un intervalo I_k dado. Estas propuestas secundarias se obtienen por aplicación de la regla de inducción a la "sección" compuesta por las s frecuencias finitas recontadas en las secciones horizontales. Sea n_1 el número tal que, si $n \geqslant n_1$, las propuestas primarias son verdaderas; asimismo n_3 será el número tal que, si $n \geqslant n_3$, todas las propuestas secundarias son verdaderas. Para probar que el paso a las propuestas secundarias mejora la convergencia, sería necesario probar que $n_3 \leqslant n_1$. En opinión de **Reichenbach**, este resultado no puede establecerse. El procedimiento que consiste en apreciar las propuestas, esencial para la teoría del progreso de la inducción, no está pues fundado en absoluto.

Si la constitución de retículos, el paso a probabilidades de nivel más alto, no permiten mejorar las propuestas, es posible, sin embargo, que autoricen su corrección. Tal sería el papel de la inducción en cruz. Pero este método no es, en realidad, sino un esquema artificial que encubre procedimientos inductivos cuya naturaleza no

[10] Cf. cap. VI, § 3.
[11] *T.P.*, § 91, pp. 467-468.

está precisada de ningún modo. La prueba de ello está en el hecho de que **Reichenbach** la utiliza en circunstancias formalmente idénticas para justificar conclusiones opuestas. Comparemos dos ejemplos que propone: uno concierne a la implicación general: "Todos los cisnes son blancos"; el otro, a la ley de **Newton**[12]. Poco importa, para nuestro propósito, que la ley que se quiere comprobar pertenezca, en un caso, al lenguaje perceptivo y, en el otro, al lenguaje teórico. Poco importa también que, en un caso, sea la ley primaria la que se somete a prueba y, en el otro, la ley secundaria. En el primer ejemplo, un enunciado de segundo nivel ha de ponerse en paralelo con la ley "secundaria" del segundo (la ley de **Newton**); es posible así formular: "En una especie animal, la frecuencia del color dominante difiere de 1." En el segundo ejemplo, los enunciados del tipo "La ley de **Newton** se verifica en tal tipo de aplicación" ha de ponerse en paralelo con la ley "todos los cisnes son blancos". Los dos ejemplos son idénticos formalmente y reciben efectivamente el mismo tratamiento: se constituye un retículo en el que cada línea corresponde a un tipo particular de verificación de la ley secundaria. En los dos casos se constata que una línea tiene un comportamiento aberrante: la línea que corresponde al color de los cisnes da una frecuencia igual a 1, cuando ocurre diferentemente en todas las otras; la línea correspondiente a los movimientos de Mercurio da una frecuencia nula de tests positivos, mientras que esta frecuencia es casi igual a 1 en las otras líneas.

Pero el tratamiento de la línea divergente es diametralmente opuesto según el caso considerado: en el primer caso se corrige la propuesta primaria teniendo en cuenta la propuesta secundaria. En otros términos, se supone falsa la ley: "Todos los cisnes son blancos."[13] Si se procediera igual en el segundo ejemplo, sería preciso concluir que las refutaciones de la ley de **Newton** en razón del avance del perihelio de Mercurio únicamente son aparentes, que resultan de errores de observación. Ahora bien, no es así la conclusión mantenida: se separa el caso del planeta Mercurio y se restringe el campo de aplicación de la ley de **Newton**, de tal manera que no se incluyan en él los movimientos de Mercurio. Cierto que se buscará un nuevo enunciado de la ley de gravitación que dé cuenta del avance del perihelio de Mercurio. Atestiguan este afán las investigaciones concernientes a la existencia de un planeta perturbador o a los efectos de una modificación del exponente de la distancia en la ley de gravitación. Pero, a la espera del éxito en estas empresas, nos contentamos con restringir el campo de aplicación de la ley de **Newton**. En suma, según el caso, se corrige la propuesta primaria o se abandona la propuesta secundaria.

La diferencia no proviene del hecho de que, en el segundo ejemplo, al ser refutada por los hechos, la ley secundaria no puede mantenerse, lo cual no ocurre en el primer ejemplo: **Reichenbach** transcribe las leyes universales bajo la forma de una doble implicación probable, de tal suerte que toleran un número finito de refutacio-

[12] Comparar *T.P.*, § 84, p. 430 y § 85, pp. 438-439.

[13] En otro ejemplo, citado en *E.P.* (§ 41, pp. 365-366) y en *F.L.P.* (cap. 5, § 19) y que concierne a la licuefacción del carbono, **Reichenbach** procede también a una corrección de este tipo de la propuesta primaria.

nes por parte de los hechos. No radica tampoco en el hecho de que una ley es una implicación universal del lenguaje de observación y la otra una hipótesis teórica, pues **Reichenbach** presenta el método de la inducción en cruz como un método cuyo uso puede reiterarse indefinidamente y que puede aplicarse de manera idéntica sea cual sea el enunciado considerado. Tampoco se da el hecho de que, en un caso, se tenga intención de someter a examen la ley primaria y, en el otro, la ley secundaria, lo que justificaría la diferencia de las conclusiones; de todas formas, sean cuales sean las intenciones en cuestión, en un caso se corrigen las propuestas primarias y en el otro no. Es preciso reconocer, por tanto, que la inducción en cruz no es ese procedimiento simple de corrección de las propuestas que describe **Reichenbach.** Ante la indeterminación de los usos que se hacen de él, la verdad obliga a decir que no se le puede otorgar crédito, por débil que sea.

Es cierto que se podría objetar que el método de la inducción en cruz puede perfeccionarse y que permite concluir sin equívoco si se prolonga suficientemente la serie que se desvía. Suponiendo que la desviación subsista, ésa sería la prueba de que es necesario separar el caso de esa serie. El propio **Reichenbach** se refiere al uso de este procedimiento[14]. Pero este proceder supone que la acumulación de las observaciones basta para acrecentar el peso de una propuesta. Parece, por otra parte, que este enunciado tan modesto sea lo mínimo que se tenga derecho a exigir de una teoría de la inducción. Como vamos a ver, la realidad es que su demostración resulta indispensable en la perspectiva de **Reichenbach.**

Reichenbach pretende que la probabilidad de una teoría depende de su extensión y que la sola inclusión de varias leyes particulares en una ley única basta para acrecentar su probabilidad[15]. Así, la reunión de la ley de **Kepler** y de la ley de **Galileo** en la ley de **Newton** constituye un progreso científico, incluso si no brinda una explicación causal, dado que aumenta la probabilidad de esas leyes. Lo que garantiza ese incremento de la probabilidad es la reunión de los dos retículos sobre los que se operaba una inducción en cruz. Pero está claro que este resultado no se consigue sino en tanto que se supone que la inducción secundaria tiene un peso más elevado porque se efectúa a partir de un número mayor de términos. Así, ese procedimiento que la lógica clásica no podía justificar, de creer a **Reichenbach**, únicamente se legitimará si se prueba que la acumulación de datos aumenta el peso de las propuestas.

¿Ocurre así? No, ya lo hemos dicho, y **Reichenbach** confiesa que "es imposible probar que la propuesta se haga mejor con un número mayor de casos observados"[16]. En rigor, un resultado de este tipo sólo se demuestra por medio de las series bernouillianas[17]. Pero una demostración que supone conocido el tipo de orden de una serie no puede pertenecer sino al conocimiento avanzado, en tanto que del es-

[14] *Ibid.*, § 85, pp. 439-440.
[15] *E.P.*, § 41, pp. 371-373.
[16] *T.P.*, § 87, p. 444.
[17] *T.P.*, § 62, p. 333.

tablecimiento del enunciado en cuestión depende el avance del conocimiento. Así desaparece la posibilidad de justificar la inducción en cruz.

Nos falta por saber en qué condiciones se podría establecer la normalidad de una serie o determinar, al menos, su tipo de orden a partir de la observación de una sección finita. Esta cuestión es de una importancia extraordinaria dado que la integración del cálculo de probabilidades en una teoría de la inducción depende de su solución satisfactoria. Son numerosos los matemáticos que pretenden que la experiencia no puede enseñarnos si una serie es normal o no, y las razones que alegan parecen decisivas. De la observación de una sección finita no se podría concluir nada acerca de la convergencia de las frecuencias en las series obtenidas por selección. Cualquier sección inicial puede ir seguida de cualquier serie. Un colectivo precedido de una configuración arbitraria de n términos, con tal que ese n sea finito, es siempre un colectivo. Una serie de un millón de "cruces" seguida de una serie aleatoria en que la frecuencia de "cruz" converge hacia 1/2, sigue siendo una serie aleatoria, decía De **Finetti**[18]. ¿Qué ocurriría si sólo se conociera una sección inicial de menos de un millón de términos? De **Finetti, Frechet,** P. **Levy** y **Borel** están de acuerdo sobre este punto: la experiencia no puede bastar para enseñarnos si una serie dada es un colectivo[19].

Pero si la experiencia no basta, ¿qué pasa cuando se añade la regla de inducción a los recuentos de frecuencias que ella proporciona? **Reichenbach** responde que, en esas condiciones, existe un método que permite determinar si la serie cuya sección se da es normal[20]. Por aplicación de la regla de inducción, se determina la probabilidad en la serie principal y, utilizando este mismo procedimiento, se investiga si las series parciales que pertenecen al dominio de invarianza de las series normales determinan una probabilidad idéntica. Naturalmente, esta verificación sólo se efectúa para un número finito de series, pero una inducción vertical permitirá, llegado el caso, proponer la normalidad de la serie. De manera más precisa, sea f la frecuencia en la sección considerada. Se procede a la extracción de subsecciones, utilizando las selecciones que pertenecen al dominio de invarianza de las series normales. Designemos por N la propiedad de que una subsección tenga una frecuencia que se encuentra en el intervalo $[f - \delta, f + \delta]$ centrado sobre f. Si una subsección tiene la propiedad N, se hace una propuesta sobre el hecho de que la serie parcial de la cual se ha extraído tenga una probabilidad idéntica a la probabilidad de la serie principal. Una inducción vertical sobre la frecuencia de las series que tienen la propiedad N lleva a una propuesta del enunciado siguiente: "la frecuencia de las series parciales del dominio de invarianza de las series normales que tienen la propiedad N es igual a 1". Este enunciado expresa una condición necesaria y suficiente para que la serie tomada en consideración sea normal. **Reichenbach** admite que, si la proporción de subsecciones examinadas que tienen la propiedad N se aproxima mucho a 1, se puede

[18] Cf. **Frechet** (M.): *E.D.* y **Levy** (P.): *F.C.P.*
[19] Cf. **Frechet** (M.): *E.D.* y **Borel** (E.): *T.C.P.*, T. 4, fasc. 3, cap. 5, § 47.
[20] *T.P.*, cap. 11, § 89, pp. 463-464.

hacer una propuesta sobre la normalidad de la serie. Naturalmente, la normalidad de la serie no puede ser jamás sino el objeto de una propuesta pero es obvio que esta propuesta puede, circunstancialmente, ser apreciada.

¿Qué crédito otorgaremos a este proceder? A nuestro modo de ver, únicamente puede ser muy débil pues no está desprovisto de ambigüedades y su fundamento es incierto. Hagamos notar, ante todo, que en ningún caso se puede establecer que la frecuencia de las series parciales que tienen la propiedad N es igual a 1; simplemente se puede hacer una propuesta sobre el hecho de que la frecuencia de las series parciales que tienen esta propiedad es superior a $1 - \epsilon$. Se sigue que, en rigor, en razón de la existencia de imprecisiones vinculadas con la regla de inducción, no se puede establecer jamás la normalidad de una serie, sino a lo sumo lo que se podría denominar su "cuasi-normalidad". Faltaría por determinar el sentido matemático que puede recibir ese concepto, algo de lo que **Reichenbach** no se ocupa. Además, la propiedad N se atribuye a sub-secciones cuya frecuencia difiere de la frecuencia de la sección principal en menos de δ. Falta por escoger δ. Si δ es más pequeña, la demostración merece más confianza, pero tiene menos probabilidad de terminar en una conclusión positiva. Ahora bien, no se indica la proporción de sub-secciones que se desvían que puede tolerarse; así como tampoco se propone ninguna regla para guiar la elección de δ. Es decir, el método es ambiguo. Por último, incluso si la sección tomada en consideración es bastante larga, la selección por grupos de predecesores cada vez más largos lleva a estimaciones obtenidas a partir de sub-secciones compuestas por un número de términos muy reducido. ¿Qué crédito otorgaremos a semejantes estimaciones? Intuitivamente, nos vemos impulsados a otorgarle un valor muy restringido. Formalmente, no podemos concluir, dado que sería preciso haber demostrado ya que una serie es normal para estimar el peso de una propuesta en función del número de elementos observados.

Todos estos argumentos manifiestan que la demostración de normalidad propuesta por **Reichenbach** es, a la vez, imprecisa y mal fundada. ¿Quiere decir esto que sea absurda? No lo creemos y es precisamente el empleo de un método análogo al de **Reichenbach** el que permite *verificar* si una serie es normal. Por otra parte, es posible dar una forma más precisa a este método. Por medio del cálculo, se determina la probabilidad de que, al aplicar una selección S_i del dominio de invarianza de las series normales a una sección de longitud dada, se obtenga una sub-sección en la cual la frecuencia difiera en más de η_i de la probabilidad de la serie principal (o de la frecuencia de la sección principal). Cuando se considera un conjunto definido de selecciones, se plantea el problema de combinar esas probabilidades y de definir lo que se puede llamar un "índice de anormalidad". Se puede calcular entonces la probabilidad de que, en la hipótesis donde la serie es normal, el valor de este índice para una sección determinada sobrepase un valor dado. Todo este desarrollo corresponde a la teoría de los tests de hipótesis. Pero también sería necesario determinar los tipos de órdenes posibles; los tests de hipótesis, suponiendo delimitado el conjunto de hipótesis posibles y la simple dicotomía de las series en normales y no-normales, comportan el riesgo de conducir sólo a resultados muy débiles. Es posible

que se reduzca a determinar simplemente la verosimilitud (en el sentido de **Fischer**) de la normalidad, sin poder calcular la verosimilitud de la no-normalidad. En todo caso, el uso de este método no puede servir para asignar la probabilidad de que una serie sea normal; lleva solamente a determinar si los datos de la experiencia impiden o no mantener la hipótesis de su normalidad; pero las razones que hacen verosímil esta hipótesis deben provenir de otra parte.

Este método, mucho más complejo, no es estudiado por **Reichenbach.** Además, difícilmente puede ocurrir de otra manera. No termina en una propuesta y no se reduce a una simple combinación de inducciones enumerativas. Corresponde, sea a la teoría de los tests de hipótesis, sea a la teoría de la verosimilitud, en tanto que la determinación de la normalidad de una serie tiene por objetivo, en el sistema de **Reichenbach**, autorizar el paso al conocimiento avanzado. Por eso debe apoyarse en los meros procedimientos del conocimiento primitivo. En estas condiciones, **Reichenbach** no puede sino presentar una visión esquelética de él, que hace sospechosas las demostraciones de normalidad y la aplicación del método refinado de corrección de propuestas de que hemos hablado anteriormente[21]. En definitiva, todos los enunciados fuertes del cálculo de probabilidades se excluyen de la teoría de la inducción, ya que suponen conocido el orden de las series.

Así, la decisión de reducir toda inducción a una combinación de enumeraciones impide a **Reichenbach** la constitución de una teoría del progreso de la inducción.

3. Las hipótesis teóricas y la concepción frecuencial de la probabilidad

La superioridad aparente del sistema de **Reichenbach** radica en el hecho de que comprende un método que permite determinar la probabilidad de las hipótesis científicas. El procedimiento más simple consiste en computar la frecuencia de los tests soportados con éxito por la hipótesis. Mientras que critica la doctrina, que fue la de **Mach**, según la cual una hipótesis teórica es siempre equivalente a una clase de proposiciones del lenguaje de observación, **Reichenbach** admite que un enunciado acerca de la probabilidad de una hipótesis teórica es siempre equivalente a un enunciado concerniente a proposiciones de observación. Afirmar que la teoría de los cuantos tiene una probabilidad igual a 0,96 vendría a ser afirmar que el 96 por 100 de los enunciados del lenguaje perceptivo que se concluyen de ella son verdaderos. Cierto que existen métodos más complejos, pero sirven para la determinación de probabilidades de nivel más alto y suponen la rectitud del procedimiento que acabamos de describir. Ahora bien, ¿se puede aceptar este procedimiento? Es fácil mostrar que es inaplicable, que lleva a resultados aberrantes y se apoya en principios indefendibles. La teoría de la probabilidad de las hipótesis contiene los desarrollos más vulnerables de toda la obra de **Reichenbach.** La crítica a la que la ha sometido **Popper**[22] es tan decisiva que nos contentaremos con una exposición sumaria.

[21] Cf. cap. VI, § 3.
[22] *L.S.D.*, § 80, pp. 254-262.

Se pueden distinguir tres formas del método general que sirve para determinar la probabilidad de una hipótesis: 1.º El cómputo de la frecuencia de las consecuencias verificadas, o de los tests superados con éxito. 2.º La constitución de un retículo, cada línea del cual corresponde a un tipo de verificación diferente. 3.º La determinación de la frecuencia de verdad en una clase de hipótesis "semejantes". Estos métodos conducen, naturalmente, a resultados distintos, dado que corresponden a probabilidades de diferentes niveles. Ahora, bien, es fácil mostrar que su uso presupone la solución de problemas delicados, que en realidad quedan sin resolver en el sistema de **Reichenbach**, y lleva a resultados absurdos.

Por ejemplo, el primer método supone que se sabe distinguir lo que constituye un caso de confirmación de una hipótesis. Sabemos que ése es el problema de **Hempel**, cuya solución no se ha logrado en modo alguno. Por supuesto, **Reichenbach** propone una solución que consiste en identificar una implicación universal con la conjunción de dos implicaciones probables conversas de grado[23]. Pero esta solución no tiene la generalidad requerida: no se aplica sino a las implicaciones universales del lenguaje de observación y no es en absoluto cierto que toda hipótesis científica adopte esa forma[24]. Por otra parte, como hace notar **Popper**, es difícil hablar de las "consecuencias verificables de una hipótesis": en general, no se podría concluir un enunciado singular de observación de una hipótesis aislada[25]. Del mismo modo, la idea de "tipo de verificación diferente" no se somete en absoluto a un análisis crítico. No se sabe qué requisitos deben satisfacer dos verificaciones para que se tenga derecho a considerar que pertenecen al mismo tipo de verificación[26]. Es decir, **Reichenbach** no ha definido de ningún modo la idea de "variedad de los casos de confirmación" ni integrado ese concepto en una teoría de la inducción. Asimismo, si se trata de determinar la probabilidad de una hipótesis calculando la frecuencia de verdad en una clase de hipótesis semejantes, no se sabe cómo constituir esa clase.

Supongamos resueltas esas dificultades que radican en la indeterminación de los conceptos sobre los que se apoya la doctrina de **Reichenbach**. De todas formas, conduce a resultados absurdos. En efecto, el método de **Reichenbach** nos fuerza a admitir que una hipótesis refutada por la experiencia tiene una probabilidad no nula. Supongamos la ley de **Newton** invalidada en un test de cada dos; se debe atribuirle una probabilidad igual a 1/2. De hecho, ningún hombre de ciencia diría que

---

[23] *T.P.*, § 85, pp. 435-436.

[24] Es verdad que **Reichenbach** escribe de modo perturbador que todas las leyes son hipótesis universales y continúa así: "En tanto que una ley científica se pone bajo la forma de una implicación universal, simbolizada por $(x)(f(x) \supset g(x))$". (*T.P.*, § 85, p. 434), como si ignorara que hay leyes irreductibles a esta forma aunque sólo sea porque contienen predicados diádicos.

[25] *L.S.D.*, § 80, p. 258.

[26] Para retomar el ejemplo de la ley de **Newton**, se puede suponer que las verificaciones por los fenómenos astronómicos (movimiento de planetas) constituyen verificaciones "de un mismo tipo" y situarlas en una sola línea del retículo, o bien se pueden componer tantas líneas como planetas diferentes hay. **Reichenbach** elige la primera solución, pero no justifica de ningún modo su elección.

su probabilidad es tal; se estimaría simplemente como falsa y, en consecuencia, de probabilidad nula. No sirve de nada invocar errores de observación sobre este punto, como hace **Reichenbach**. Cierto que esos errores pueden explicar algunos resultados negativos en el test de una hipótesis verdadera. Pero su tasa debe ser muy débil cuando se trata de errores excepcionales y deben dar lugar a una crítica de la experiencia. En cuanto a los errores cuya causa es constante y que dan lugar a una dispersión de los resultados, constituyen el objeto de una teoría, como **Reichenbach** es el primero en saber. En consecuencia, un resultado de medida tal que difiera en una cierta cantidad de la magnitud prevista será no obstante tenido por una verificación positiva. El hecho de que toda medida empírica está afectada de errores de observación exige que un esquema probabilista venga a completar toda teoría científica. Pero la probabilidad de que se trata aquí no tiene nada que ver con la probabilidad de la hipótesis.

A propósito del método del retículo, es fácil mostrar que conduce igualmente a resultados aberrantes. Según **Reichenbach**[27], en la situación experimental clásica, hay tres formas de verificación de la teoría de la relatividad generalizada: el movimiento de Mercurio, la curvatura de los rayos luminosos en un campo gravitatorio y el efecto Doppler. Supongamos que uno de esos tipos de verificación conduzca siempre a fracasos mientras que los otros dos lleven siempre a éxitos. Estaría en la lógica del sistema estimar en 2/3 la probabilidad de esta teoría, estimación en la que, naturalmente, no se tiene en cuenta el hecho de que se funda sobre el principio de equivalencia, que resuelve dificultades teóricas que habían resistido a dos siglos de estudio de la mecánica. Es obvio que una estimación semejante es inaceptable. Consciente de este hecho, tomando ejemplo de la ley de **Newton, Reichenbach** propone otra solución: en la medida en que un tipo de verificación fracase siempre, se invalida[28] el enunciado universal que constituye la ley. Pero, ¿qué se quiere decir? ¿Es preciso concluir de ahí que una ley nunca refutada tiene una probabilidad igual a 1 y una probabilidad igual a 0 en el caso contrario? Si fuera preciso admitir esta conclusión, visiblemente destinada a evitar otras conclusiones igualmente devastadoras, no quedaría gran cosa de la teoría de la probabilidad de las hipótesis.

En cuanto al método que consiste en determinar la probabilidad de una hipótesis, o más bien de una teoría científica, como "la proporción de las teorías que han logrado éxito entre [la] multitud de las teorías [producidas por los físicos]"[29], limitando circunstancialmente este conjunto a las teorías "semejantes", no se tropieza solamente con dificultades prácticas, que radican en la ausencia de estadísticas concernientes a la frecuencia de las teorías que logran éxito, como pretende **Reichenbach**[30]. Es enteramente inaceptable. Creer que es posible constituir clases de teorías

[27] *P.S.T.*, cap. 3, § 36, p. 232.

[28] "Al menos es verdad que una línea negativa es considerada como suficiente para invalidar el enunciado universal extendido en la dirección vertical." (*T.P.*, § 85, p. 439.)

[29] *E.P.*, § 43, p. 397.

[30] *Ibid.*, p. 399.

homogéneas supondría ignorar el sentido del progreso científico. Además, una teoría únicamente se abandona porque es incapaz de dar cuenta de la experiencia. En estas condiciones, el método de **Reichenbach** comporta el riesgo de conducir a resultados decepcionantes, dado que la mayoría de las hipótesis del pasado no fueron coronadas por el éxito. El aparato técnico utilizado no puede enmascarar el hecho de que sólo aporta una enseñanza, a saber, esta verdad trivial de que ninguno de los enunciados de las ciencias de la naturaleza está establecido definitivamente.

Así, cuando se aborda el problema de la probabilidad de las hipótesis, el sistema de **Reichenbach** manifiesta de modo estentóreo sus insuficiencias. Toda tentativa de mejorar los métodos que se nos han propuesto para determinar esas probabilidades se revelará como un callejón sin salida[31]. En definitiva, carecen de pertinencia todos los análisis de **Reichenbach** concernientes a la inducción explicativa. Por ejemplo, los textos que tratan de la definición de la simplicidad en términos de interpolación están entre los más vulnerables. Al ser este problema marginal, nos contentaremos con una crítica sumaria. Recordamos que, a fin de evitar que un simple juego de escritura permita agrupar juntas leyes diversas y acrecentar así sus probabilidades por la mayor extensión que se les confiere, **Reichenbach** se encuentra en la necesidad de obligar a las hipótesis científicas a que satisfagan ciertos requisitos en materia de simplicidad. Pero la definición de la curva simple como la que realiza una interpolación lineal, no sólo entre las magnitudes físicas sino también entre sus derivadas, es enteramente insuficiente. Lleva a otorgar un privilegio abusivo a las funciones algebraicas[32]. Además no elimina sino imprefectamente la ambigüedad en la elección de una curva, como **Reichenbach** se ve obligado a reconocer[33]. De modo más general, está claro que hay una desproporción entre los procedimientos utilizados por el pensameinto científico y la descripción que de ellos brinda **Reichenbach.** Es bastante sorprendente que, después de haber reconocido el carácter específico de la inducción explicativa, **Reichenbach** quiera dar cuenta de ella mediante esquemas cuyo carácter simplista salta a los ojos. Se plantea el problema de determinar el origen de la extraña ceguera de que da prueba.

A nuestro modo de ver, y en eso nos adherimos a la opinión de **Popper,** radica en la confusión entre la probabilidad de las hipótesis y la probabilidad de los sucesos.

---

[31] **Popper** toma en consideración diversas modificaciones del método simple: contar la relación del número de tests soportados con el número de tests que no se han probado (pero es igual a 0), del número de tests pasados con éxito con un número de tests cuyos resultados no tienen nada de decisivo (pero esta determinación será subjetiva dado que la probabilidad dependería del cuidado del experimentador). Ninguna de estas modificaciones –demuestra– puede mantenerse. (*L.S.D.*, § 80, pp. 257-258.) Hagamos notar que la primera modificación no está desprovista de fundamento. **Nagel** objetaba a **Reichenbach** que su medida de la probabilidad es independiente del número de verificaciones; ahora bien, ocurre que cuando se dice que una teoría es más probable que otra, se entiende por ello que la primera se ha verificado un mayor número de veces (Cf. *P.T.P.*, § 8). Pero se ve que es difícil tener en cuenta este factor de apreciación en una teoría frecuencial.

[32] Una función algebraica satisface siempre los requisitos que definen una curva plana.

[33] *E.P.*, § 42, pp. 379-380.

Ciertamente, desde **Boole**, se sabe que la probabilidad puede definirse como un concepto lógico. Nada impide hablar de la probabilidad de una proposición que enuncia la producción de un suceso más bien que de la probabilidad de ese suceso, y la primera terminología puede tener ventajas innegables. Entonces, si la definición frecuencial es adecuada para ciertos usos del concepto de probabilidad, se podrá, en ciertos casos, definir la probabilidad lógica como una frecuencia de verdad. Pero si el concepto de probabilidad de una proposición recibe así sentido, es sólo bajo ciertas condiciones limitativas, bastante mal definidas por otra parte. Lo que plantea problemas es la extensión de esta definición a toda proposición, sea cual sea su forma, y la reducción de toda probabilidad a una frecuencia. Conduce necesariamente a identificar la probabilidad de una hipótesis con la probabilidad de proposiciones que enuncian la producción de ciertos sucesos, a medirla por la frecuencia de sus consecuencias verificadas. Obliga a hacer como si la hipótesis fuera *idéntica* a una *serie* de proposiciones de observación, lo que es manifiestamente falso.

El origen del error reside, en definitiva, en la confusión entre leyes probables y leyes de probabilidad; como si, cuando hablamos de una ley probable, entendiendo por eso que es plausible, que es conforme a la razón admitirla, quisiéramos decir que una proporción determinada de sus consecuencias se verificarán, que es una ley que enuncia una probabilidad. Cierto que, en numerosos casos, los mismos parámetros que determinan una ley de probabilidad no están definidos de manera cierta, pero se les asigna una simple probabilidad de tal suerte que las propias leyes de probabilidad no son más que probables. Pero esto no justifica en modo alguno la confusión entre leyes de probabilidad y leyes probables. Cuando **Reichenbach** invoca el nacimiento de una ciencia probabilitaria de la naturaleza para mostrar la necesidad de una lógica inductiva probabilitaria, utiliza un argumento no tópico, pero que revela esta confusión, pues, aunque todas las leyes fueran de tipo determinista, de todas formas se mantendría el problema de saber si se les puede asignar una probabilidad; y siendo deterministas no por ello dejarían de ser menos inciertas.

Pero esta confusión entre sentidos distintos del concepto de probabilidad, que lleva a **Reichenbach** a proponer soluciones aberrantes cuando se abordan los problemas de la probabilidad de las hipótesis o la teoría del progreso de la inducción, le viene impuesta por su concepción frecuencial de la probabilidad. Por eso, el fracasc total de su sistema prueba que una lógica inductiva sólo es posible si se funda sobre un concepto de probabilidad distinto del que recibe una interpretación en términos de frecuencia.

CAPITULO VIII

LA JUSTIFICACION DE LA REGLA DE INDUCCION

Reichenbach propone una doctrina del progreso de la inducción y una teoría de la probabilidad de las hipótesis. Una y otra son igualmente inaceptables. Este resultado, alcanzado al término del capítulo precedente, nos permite contestar la posibilidad de fundar una lógica inductiva sobre una concepción frecuencial de la probabilidad. Sin embargo, hemos silenciado hasta ahora un aspecto esencial de la obra de **Reichenbach**: **Reichenbach** intenta aportar una justificación de la regla de inducción que propone y resolver así el problema de **Hume**. Cierto que hemos hecho notar la ambigüedad de la definición de probabilidad en términos de clases, que es, en definitiva, una ambigüedad de la regla de inducción. Pero no hemos cuestionado la validez de esta regla, ni sometido a un examen crítico las razones que, según **Reichenbach**, constituyen su justificación.

Nos ha sido posible diferir hasta ahora el estudio de esta cuestión: una cosa es justificar la regla de inducción y otra fundar sobre ella la lógica inductiva, reduciendo toda inducción a un encadenamiento de enumeraciones. Aun cuando la segunda empresa fuera llevada a cabo, quedaría por justificar la regla inductiva sobre la que se apoyaría todo el sistema. En cambio, incluso si la doctrina del progreso de la inducción se viene abajo, una justificación de la regla de inducción por enumeración simple sería un resultado no desdeñable, si bien no basta, naturalmente, para justificar el conjunto del conocimiento experimental. Conserva su importancia hasta cuando no se la inserta en el marco de una teoría frecuencial de la lógica inductiva.

Los resultados establecidos anteriormente no nos dispensan pues, en absoluto, de examinar cuál es el pensamiento de **Reichenbach** sobre este punto, del que veremos cómo no carece de originalidad. En efecto, si se ha ganado que **Reichenbach** no llega a constituir una lógica inductiva plenamente satisfactoria, no se puede excluir que haya logrado justificar un tipo de inferencia inductiva, la enumeración simple.

1. Inducción y predicción.

Contrariamente a ciertos autores, en especial a **Goodman**, **Reichenbach** no estima la cuestión de la justificación de la inducción como un seudo-problema. No basta con constatar que una inferencia inductiva se realiza conforme a las reglas corrientemente admitidas para que se tenga derecho a conferirle la legitimidad. El

problema planteado por **Hume** es, por tanto, a sus ojos, un auténtico problema, pero se reduce a la sola cuestión de la justificación de la regla de enumeración, dado que toda inducción es una combinación de enumeraciones.

Del mismo modo, no se ignoran las condiciones que debe cumplir toda solución aceptable de este problema. El paso al conocimiento avanzado supone la determinación de ciertas probabilidades y, por tanto, la aplicación previa de la regla de inducción. Se sigue de ahí que toda justificación de la regla de inducción que utilizara resultados pertenecientes al conocimiento avanzado sería circular, dado que la demostración de la validez de esos resultados se subordina a una justificación de la regla de inducción. De ahí que la justificación buscada deba conseguirse en el marco del conocimiento primitivo. En términos precisos, se debería probar que es legítimo hacer propuestas sobre la persistencia de las frecuencias observadas, sin suponer conocida ninguna probabilidad. **Reichenbach** es perfectamente consciente de esta exigencia, que trata de respetar escrupulosamente.

Por otra parte, excluye las justificaciones que se apoyarían sobre alguna hipótesis que se hiciera con respecto a la naturaleza del universo. El argumento de **Mill**, que se funda en la uniformidad del curso de la naturaleza, o el de **Keynes**, que reposa sobre la limitación de la variedad independiente proporcionan ejemplos de ello. **Reichenbach** califica de *ontológicas* a las justificaciones de ese tipo. Se puede dudar de que exista algún principio que justifique la inducción enumerativa; de todos modos, no se podría conceder valor a una justificación ontológica por la siguiente razón: o bien el mismo principio que justifica la inducción debe estar fundado sobre su uso, y la justificación es manifiestamente circular, o bien depende de un modo de conocimiento no científico. Aceptar esta última posibilidad sería la ruina de la filosofía que **Reichenbach** profesa.

Pero, ¿cómo justificaremos la inducción sin recurrir a la ontología y manteniéndonos en el marco del conocimiento primitivo? ¿No ha probado **Hume**, perentoriamente, que la empresa debía fracasar? Es claro que de un recuento de frecuencia, en una sección finita de una serie, no se podría deducir que la frecuencia converge hacia un valor determinado cuando se prolonga indefinidamente esa sección. ¿No es necesario concluir de ahí que es imposible justificar la inducción? La respuesta es, sin discusión, afirmativa si se concibe toda justificación como una prueba de la verdad de la conclusión inducida, hasta como una simple determinación cierta de la probabilidad de esta conclusión, y **Reichenbach** no lo niega. Pero, desarrollando ciertas ideas de **Peirce** concernientes al carácter auto-correctivo de la inducción, intenta probar que la regla de inducción puede, no obstante, ser justificada.

En efecto, al lado del método que consiste en justificar la inducción probando la verdad de sus conclusiones, existe otro procedimiento que consiste en mostrar que es un método adecuado a un fin. En suma, **Reichenbach** rechaza una hipótesis admitida implícitamente por **Hume**, a saber, que una prueba de la verdad de las conclusiones inducidas es la condición necesaria de una justificacion de la induc-

ción[1]. Al lado de una *validación* de la inducción, se puede concebir una defensa (*vindication*) de otro tipo, que consiste en legitimarla a título de *medio* adaptado al fin perseguido en la construcción del conocimiento científico.

Pero, para construir una justificación de este tipo, es necesario determinar con precisión el fin del conocimiento científico. **Reichenbach** sigue, en este punto, la lección de **Comte**: conocer es prever. La validez de un sistema de representaciones científicas se comprueba por el hecho de que lleva a predicciones coronadas de éxito. Hay que llegar incluso a decir que el conocimiento científico de la naturaleza no tiene otra función sino permitir la predicción. Para una proposición de las ciencias experimentales, ser verdadera e implicar predicciones que la experiencia confirma son una sola y misma cosa. Ocurriendo esto, se sabe que las proposiciones de las ciencias experimentales son únicamente probables; pasa igual con las predicciones que fundan. Ahora bien, todo enunciado de probabilidad debe interpretarse en términos de frecuencia. Así, toda proposición científica es una predicción de un tipo determinado; viene a predecir que una frecuencia convergirá hacia un límite determinado. Por ejemplo, la simple aserción de una proposición "teórica" equivale a la predicción siguiente: "la frecuencia de las pruebas que superará con éxito es igual a 1". El conjunto del conocimiento científico tiende, por tanto, a un fin único: predecir que ciertas frecuencias convergirán hacia límites determinados.

Precisado de este modo el fin del conocimiento científico, se puede probar que la regla de inducción se adapta perfectamente a este fin. Se trata, no de validar estas conclusiones, sino de establecer que la política que consiste en aplicarla es la mejor que podemos seguir. Una justificación de este tipo, calificada por **Reichenbach** como *epistemológica,* será independiente de toda hipótesis concerniente a la naturaleza del universo. Se obtendrá si se establece que la adopción de la regla de inducción es una condición necesaria y suficiente del éxito en nuestra predicciones.

Probar que la regla de inducción es una condición necesaria del éxito es mostrar que la elección de cualquier otra regla debe conducir necesariamente al fracaso. Pero es claro que un azar feliz puede hacer que un método distinto de predicción tenga buen éxito en un determinado caso mientras que la regla de inducción fracasa. Sólo podemos esperar, pues, una justificación asintótica. Se trata de probar la superioridad de la regla de inducción sobre toda otra regla cuando se reitera indefinidamente la aplicación de la regla escogida. Como vamos a ver, en un caso semejante, la prueba es bastante simple.

Cuando se trata de predecir el límite hacia el que converge una frecuencia, se pueden distinguir dos tipos de reglas: algunas determinan este límite únicamente en función de la frecuencia observada en una sección de la serie considerada; otras utilizan otros criterios. Llamamos *estadísticas* a las primeras; *no-estadísticas,* a las segundas. Una regla de predicción estadística se define de la manera siguiente: Dada

[1] *E.P.,* § 39, p. 348.

una sección de n términos de una serie en la que se ha hecho recuento de la frecuencia f_n, se hace la propuesta de que la frecuencia converge hacia $\varphi(f_n, n)$. Elegir la función φ es elegir una regla estadística. Pero se puede escribir la función de la forma siguiente:

$$\varphi(f_n) = f_n + \sigma(f_n)^2 .$$

Si $\sigma(f_n)$ tiende hacia 0 cuando n crece hacia el infinito, la regla se dirá convergente. Cuando se multiplican las observaciones, una regla convergente lleva a las mismas predicciones que una regla no-convergente. Al estar divididas las reglas estadísticas en dos categorías, se trata de establecer la superioridad de la regla de inducción sobre las reglas de los tres tipos siguientes: no-estadísticas, estadísticas no-convergentes y estadísticas convergentes.

Se demuestra fácilmente que la aplicación reiterada de una regla estadística no-convergente debe conducir necesariamente a predicciones erróneas. En efecto, si se adopta la regla definida por la función σ, cuando se multiplican las observaciones, se tiende a hacer propuestas de que la frecuencia convergirá hacia $\lim_{n \to \infty} (f_n + \sigma(f_n))$. Se comete entonces un error sistemático igual a $\lim_{n \to \infty} \sigma(f_n)$. Es pues legítimo rechazar las reglas no-convergentes, teniendo en cuenta su comportamiento asintótico. En cambio, todas las reglas convergentes comparten con la regla de inducción esta propiedad que, según **Peirce**, constituye "la verdadera garantía de su validez", a saber, que "es un método para alcanzar conclusiones que, si se persevera bastante tiempo, corregirá ciertamente todo error concerniente a la experiencia futura al que hubiera podido conducirnos temporalmente"[3]. En esas condiciones, ¿qué razones pueden imponer la elección de la regla de enumeración con preferencia a otra regla convergente? **Reichenbach** propone dos respuestas distintas. Por una parte, la regla de enumeración se justificaría por consideraciones de comodidad: es más simple que las otras reglas, lo cual basta para que se la prefiera[4]. Por otra parte, la elección de una función σ que no fuera idénticamente nula sería arbitraria y comportaría el riesgo de "hacer menos buena la convergencia". La búsqueda del "valor que minimice el riesgo" lleva a retener la regla de enumeración[5]. Lo que significa que la regla de enumeración converge, si no más rápidamente que las otras, al menos tan rápidamente que es posible que tenga buen éxito cuando todas las demás reglas fracasan.

Falta por establecer la superioridad de la regla de inducción sobre los métodos no estadísticos. Supongamos que estamos en presencia de un método tal que determina el límite hacia el que converge una frecuencia teniendo en cuenta datos distin-

---

[2] Hagamos notar que $\sigma(f_n)$ es función no sólo de (f_n) sino también, circunstancialmente, de n, lo que **Reichenbach** parece olvidar cuando pasa a este modo de escritura.

[3] *Collected Papers*, II, Sec. 2.769 (citado por **Katz** (J.): *P.I.S.*, § 3.3, p. 45).

[4] *T.P.*, § 91, pp. 475-476.

[5] *E.P.*, § 39, p. 355.

tos que la frecuencia observada en una sección inicial finita. Ni siquiera se excluye que este método proporcione resultados más fuertes que la regla de inducción, que permita saber cuál será cada término de una serie. Por ejemplo, indica cuál será el resultado cada vez que tiramos un dado. No excluimos que esos métodos dependan de las ciencias ocultas, como en la hipótesis que **Reichenbach** hace acerca de ellos. ¿Cómo estableceremos que la regla de inducción resulta preferible? Es claro que esos métodos, suponiendo que existan, deben presentar sus títulos de crédito. Ahora bien, sólo hay una manera de comprobarlos, que consiste en ponerlos a prueba por medio de la regla de inducción[6]. En otros términos, se determinará la frecuencia de las predicciones coronadas de éxito a las que conduce su uso. Así se medirá el crédito que es legítimo otorgarles, dado que, a partir de esta frecuencia, por aplicación de la regla de inducción, se determina la probabilidad de las predicciones que proporcionan. Todo método no-estadístico está sometido, por tanto, a la jurisdicción de la regla de inducción. Es, pues, legítimo afirmar que la regla de inducción constituye una condición necesaria del éxito de nuestras predicciones.

Pero, ¿es acaso una condición suficiente de él? ¿Se puede probar que la aplicación de la regla de inducción debe conducir necesariamente al éxito? Es evidente que una demostración semejante no puede lograrse. En efecto, no está establecido, en modo alguno, que toda frecuencia que se puede definir con respecto a una pareja de series converge. Se sigue de ahí que algunas predicciones obtenidas por aplicación de la regla de inducción son erróneas y permanecerán siéndolo, cualquiera que sea el número de observaciones utilizadas. Sin embargo, se puede establecer que, si las frecuencias convergen, entonces la aplicación reiterada de la regla de inducción debe llevar al éxito. Esto resulta inmediatamente de la definición de la convergencia. Sea cual sea el intervalo de exactitud ϵ que se asigne, es cierto que existe n_1 tal que, si $n_1 \leqslant n$, se tiene $|f_n - p| \leqslant \epsilon$. De este modo, la regla de inducción puede fracasar; los fracasos pueden multiplicarse; pero no serán sino provisionales y terminarán siempre por corregirse. En suma, la suficiencia de la regla de inducción resulta inmediatamente de su carácter de regla autocorrectiva[7]. Si hay alguna expectativa de que el éxito sea posible, interesa, por tanto, adoptar esta regla.

¿Quiere decir esto que sea necesario suponer que todas las frecuencias convergen para que se establezca su suficiencia? De ningún modo.

Dado que es el único método que permite prever con éxito, basta con suponer que, en *ciertos* casos, es posible la previsión; dicho de otra manera, que es posible que ciertas frecuencias converjan. ¿Es necesario dar una *probabilidad finita* a esta hipótesis? Esto es lo que sostiene E.J. **Nelson**, quien concluye de ahí que el argumento de **Reichenbach** es circular[8]. Según este autor, la justificación de la regla de inducción exige que se pruebe que hay una probabilidad finita de que conduzca

[6] *T.P.*, § 91, p. 476 y *E.P.*, § 39, pp. 352-354.
[7] *T.P.*, § 91, pp. 471-472.
[8] *P.R.I.*

al éxito. Ahora bien, una prueba tal no puede darse en el sistema de **Reichenbach**, puesto que toda determinación de probabilidad exige el uso de la regla de inducción. Esta crítica carece de pertinencia. Cierto que únicamente se puede medir la probabilidad del éxito de la regla de inducción calculando la frecuencia de éxito en sus aplicaciones pasadas y aplicándoles la regla de inducción. Pero **Reichenbach** no se propone determinar esa probabilidad en ningún momento. Cuando afirma que la regla de inducción se justifica si tiene alguna expectativa de éxito, el término expectativa no tiene ninguna significación probabilitaria. Hablar de sus *expectativas* de éxito significa simplemente que el éxito es *posible,* que no está excluido[9]. Es imposible, por tanto, probar que la inducción tendrá buen éxito necesariamente. Pero es igualmente imposible probar que necesariamente fracasará, pues una prueba semejante supondría que se pueden establecer con certeza ciertos caracteres de los sucesos sobre los cuales recaen las predicciones, lo que es manifiestamente imposible. Se sigue de ello que la inducción conserva esa expectativa de éxito que permite afirmar que la predicción no es imposible y justifica la inducción a título de medio adaptado al fin que se propone la ciencia.

Sin embargo, no podía escapársele a **Reichenbach** la insuficiencia de la justificación así obtenida. Cierto que se ha establecido que la regla de inducción es una condición necesaria y suficiente del éxito de las predicciones. Pero es a reserva de que se reitere su aplicación indefinidamente. Ese resultado, puramente asintótico, no enseña nada acerca del valor de las predicciones obtenidas cuando se aplica la regla de inducción en las condiciones que son las condiciones reales de su aplicación, a saber, cuando sólo se dispone de un número finito de observaciones. Suponiendo que la convergencia sea muy lenta, es posible que el número de observaciones necesarias para obtener predicciones correctas exceda, y con mucho, el poder del observador. En tal caso, la regla de inducción fracasará necesariamente. Consciente de esta dificultad, **Reichenbach** introduce una nueva noción: la noción de límite práctico. Se llamarán series con límites prácticos aquéllas "que muestran una convergencia suficiente en el dominio accesible a la observación humana"[10]. Si la convergencia de una serie es demasiado lenta, no tendrá límite práctico, aun cuando converja. En cambio, una serie que converge durante un intervalo muy largo, correspondiendo ampliamente al número de observaciones accesibles a la especie humana, y que diverge después, es, para nosotros, análoga a una serie convergente; esta serie, denominada semi-convergente, tiene un límite práctico. La aplicación de la regla de inducción puede llevar al éxito en el caso en que la serie considerada es una serie con límite práctico. Un universo donde existen semejantes series es tal que las predicciones son posibles en él: se dirá que es "predicable". Como no se excluye que el universo sea predicable, la regla de inducción conserva esa expectativa de éxito que basta para justificarla.

La justificación que acaba de obtenerse es, como habíamos anunciado, una

[9] Cf. **Reichenbach** (H.): *C.C.*
[10] *E.P.*, § 40, p. 361 y *T.P.*, § 66, pp. 347-348.

defensa de la inducción y no una validación. Se ha probado que la regla de inducción se adapta al fin perseguido en el conocimiento científico, no que lleva a conclusiones verdaderas si las premisas lo son. Intentar establecer este último resultado es olvidar que la relación de las premisas de una inferencia inductiva con sus conclusiones no es analítica. Sin embargo, esta justificación se ha alcanzado por un simple análisis de la naturaleza y del fin del conocimiento científico. Si la inducción no es una tautología, es tautológica la prueba que establece que ella constituye la mejor propuesta[11]. **Reichenbach** puede afirmar que "la relación entre el proceder inductivo y el fin del conocimiento es analítica"[12]. Así pretende haber cumplido la tarea que se había asignado: dar una justificación epistemológica de la inducción.

2. Justificación de la inducción y lógica probabilitaria

Se hubiera podido poner en duda *a priori* la posibilidad de una justificación de la inducción. ¿No hemos mostrado que la regla de inducción es ambigua; que, según el modo de división de las clases, conduce a predicciones divergentes y por tanto contradictorias? ¿No se puede mostrar, acaso, que en ciertas ocasiones debe fracasar necesariamente?

Así es, y **Reichenbach** debe enfrentarse con una objeción decisiva, fundada sobre la paradoja de **Goodman** tomada en su forma original o en formas similares. La consideración del predicado "verde" lleva, después de la observación de n esmeraldas que son todas ellas verdes, a afirmar, por aplicación de la regla de inducción, que todas las esmeraldas que se observen ulteriomente serán verdes. Pero, en las mismas condiciones, la consideración del predicado "verdul" lleva a afirmar que, en el futuro, todas las esmeraldas observadas serán azules. Es extraño que una regla "justificada" lleve a conclusiones contradictorias. Pero hay más. Supongamos observados n objetos que son B. Sea C la clase definida así: "x es un C si x es uno de los n primeros B observados o x es un $\sim B$". Por aplicación de la regla de inducción a la pareja $\langle B, C\rangle$ se concluye que todos los B son C, es decir que, en el futuro, todos los B serán $\sim B$. En un caso semejante, la regla de inducción debe fracasar necesariamente[13].

Reichenbach responde únicamente con argumentos dilatorios[14] a las objeciones de este tipo. Invoca el hecho de que la elección de la clase es contraria al principio que exige que se tome la clase más pequeña para la que se disponga de estadísticos dignos de confianza y, por tanto, que se prefiera B a C. Pero, como el propio **Rei-**

[11] *E.P.*, § 40, p. 359.
[12] *T.P.*, § 91, p. 479.
[13] El único modo de evitar la contradicción sería suponer vacía la clase B. Hipótesis absurda dado que podría aplicarse simultáneamente a toda clase, en particular a B y a $\sim B$. (Presentamos esta paradoja de forma un poco diferente a la que le da **Carnap**.)
[14] *T.P.*, § 87, pp. 448-449.

chenbach observa, ese principio pertenece al conocimiento avanzado. Su enunciado supone que se saben distinguir los estadísticos que merecen nuestra confianza. Por eso es torpe invocarlo en este caso. Añadamos que no basta para evitar todas las formas de la paradoja de **Goodman**: las clases definidas por los predicados "verde" y "verdul" son incomparables; el principio invocado no justifica que se otorgue un privilegio a una de ellas. Por otra parte, se puede añadir que, cuando se prolonguen las observaciones, las propuestas erróneas serán rectificadas, disminuyendo progresivamente la frecuencia de los *C*. Tal es, en definitiva, la respuesta de **Reichenbach.** Pero esta respuesta olvida la forma de la definición de la clase *C* que es tal que *en todo momento* del proceso de observación, si se define la clase *C* y se le aplica la regla de inducción, se obtiene una predicción errónea. **Reichenbach** confiesa además su fracaso, dado que reconoce que "la inferioridad de esta regla particular en el ejemplo considerado no puede demostrarse en (el) conocimiento primitivo".

Es innegable que la dificultad que acabamos de evocar no es superada de ningún modo por **Reichenbach.** Tenemos derecho a sorprendernos al verle eludir un problema tan importante, cuya solución es necesaria si se quiere que la justificación de la regla de inducción conserve alguna significación. Pero las razones de su manera de proceder son patentes. Una solución aceptable de los problemas que revela la paradoja de **Goodman** exigiría que se delimitara el conjunto de las clases a las que puede aplicarse la regla de inducción. Es probable que nos viéramos llevados a distinguir las clases "naturales" y las clases "artificiales" y a restringir a las primeras el campo de aplicación de la regla de inducción. Asimismo debería especificarse el orden en el que se eligen los términos de las series. Procede pensar que nos veríamos forzados a introducir algunos presupuestos concernientes a la naturaleza de las cosas para explicar que sólo se justifican ciertas aplicaciones de la regla de inducción. En suma, contrariamente al deseo de **Reichenbach**, la justificación sería "ontológica".

Dejemos de lado esos delicados problemas. Supongamos delimitado un conjunto de predicados que designan "propiedades naturales". La regla de inducción no se aplicará sino a las clases definidas por esas propiedades y las contradicciones se evitarán. ¿Quiere decir esto que, en esas condiciones, es aceptable la justificación propuesta por **Reichenbach**? Vamos a ver que no ocurre nada de eso. Y, ante todo, ¿es la regla de enumeración una condición necesaria del éxito de las predicciones en el sentido de que superior a toda otra regla, que fracasaría necesariamente si ella misma fracasa?

En lo que atañe a la demostración de la superioridad de la regla de inducción sobre los métodos no-estadísticos, nos parece que encierra un círculo manifiesto. **Reichenbach** afirma que la validez de un método no-estadístico únicamente puede comprobarse midiendo la frecuencia de las predicciones exactas que ha permitido obtener y determinando, a partir de esta medida, su probabilidad de éxito por aplicación de la regla de inducción. Pero, ¿no es precisamente eso suponer lo que se cuestiona? Comparando el método estadístico con los diversos procedimientos empleados en las ciencias ocultas, **Reichenbach** facilita deliberadamente su tarea.

Tomemos otros ejemplos. Júzguese la validez de un sistema de predicciones fundado sobre el uso de la explicación teórica de ciertos fenómenos. Supongamos que la teoría en cuestión pertenece a la ciencia probabilitaria de tal suerte que los enunciados que proporciona sean enunciados de probabilidad y que conduzca a un sistema de predicciones que toleren una cierta proporción de refutaciones por parte de los hechos. ¿Se juzgará el valor de ese sistema de predicciones únicamente por la frecuencia de verdad de las predicciones? Es claro que, *a priori*, no se puede excluir que intervengan otros factores, como la racionalidad de la teoría sobre la que se apoya, su integración en una teoría más amplia y además confirmada, etc... Admitir el argumento de **Reichenbach** es admitir toda su teoría de la probabilidad de las hipótesis científicas que hemos criticado anteriormente. La doctrina de la justificación de la inducción no tiene, con respecto al conjunto de la doctrina de **Reichenbach**, esa independencia que hemos supuesto para darle las máximas expectativas de éxito.

Asimismo creemos que el argumento esgrimido por J. **Katz**[15] para excluir los métodos no-estadísticos prueba poco. Ese argumento es el siguiente: para comprobar un método de predicción, es preciso darle la forma de un método general, es decir, formularlo como una regla estadística. En realidad, nada excluye que un método general no adopte la forma de una regla estadística, aunque sólo sea por razón del hecho de que el concepto de regla estadística ha recibido una definición muy estricta[16].

En cuanto a la superioridad de la regla de inducción sobre los demás métodos estadísticos, no está en modo alguno establecida, como vamos a ver. Admitamos que se excluya a las reglas no-convergentes. Se mantiene el problema de justificar que se elija la regla de enumeración entre las reglas convergentes. El primer argumento invocado por **Reichenbach** –la simplicidad de la regla de inducción– no vale nada. La elección de la regla más simple sólo se impone cuando se trata de reglas inductivas equivalentes. Ahora bien, la equivalencia de las reglas únicamente es asintótica; en lo finito, dan predicciones divergentes. La distinción operada por **Reichenbach** entre la simplicidad inductiva y la simplicidad descriptiva puede tornarse contra el argumento que esgrime para justificar la regla de enumeración[17]. La simplicidad sólo es un criterio de elección cuando se trata de elegir entre *descripciones* del mismo sistema teórico, es decir, entre reglas inductivamente equivalentes. Si hay un argumento que pruebe, sólo puede ser el segundo: la regla de inducción es la que presenta mejor convergencia. Pero este resultado no es establecido en absoluto por **Reichenbach**; es postulado. ¿Es posible completar su doctrina sobre este punto? Vamos a ver que no.

El problema es, por tanto, determinar la regla que brinde las mejores estimacio-

[15] *P.I.S.*, § 3.6, p. 78.

[16] Por ejemplo, en sentido estricto, un método que tiene en cuenta el orden de los términos no es estadístico.

[17] Cf. **Katz** (J.J.): *P.I.S.*, § 3.4, pp. 65-66.

nes cuando se procede utilizando un número finito de observaciones. No se puede determinar con certeza si una aplicación de la regla de inducción tendrá buen éxito o no, pero se puede calcular la probabilidad de su éxito si se admiten ciertas hipótesis bastante restrictivas (normalidad de las series, carácter aleatorio de la muestra). **Carnap** resolverá ese problema[18]. No carece de interés constatar que se ve llevado a descalificar la regla de inducción: excluidos los casos en que las frecuencias convergen hacia 0 ó 1, en general no es la regla de inducción la que proporciona las estimaciones mejores. Entendamos por eso que no es ella la que proporciona las estimaciones que minimizan el error-cuadrático medio. Sucede, además, que la regla que brinda las mejores estimaciones varía con ciertas características del dominio de objetos considerados[19]. Sólo en el caso en que la mayor parte de las frecuencias converge hacia 0 o hacia 1, dicho de otra manera, cuando las leyes probabilitarias son la excepción, está justificada la elección de la regla de inducción.

El detalle de los resultados alcanzados, cuya exposición exigiría, por otra parte, el conocimiento de la terminología de **Carnap**, nos importa poco. Nos basta saber que se ve llevado a descalificar la regla de inducción, que sólo excepcionalmente es la que brinda la mejor convergencia. Además, es preciso hacer notar que el método empleado para resolver ese problema supone el conocimiento de las características generales del universo. En suma, nos encontramos en la situación siguiente: o bien no se toma en consideración sino el comportamiento asintótico de las reglas. En este caso, todas las reglas convergentes se justifican; no se sabe cómo elegir entre ellas y la justificación obtenida es demasiado débil. O bien se toma en consideración su comportamiento en el dominio finito. Pero, entonces, nada asegura que la regla de inducción sea la mejor y, en todo caso, la determinación de la regla que debe preferirse es un problema que no puede resolverse sin el conocimiento de ciertos caracteres del universo, conocimiento que no puede adquirirse sino por un uso previo de la inducción. Hemos visto antes cómo la determinación de las propiedades de los estadísticos es un problema de la teoría de la inferencia que depende de una teoría de la inducción secundaria. Ahora bien, la cuestión actualmente en litigio es un problema de ese tipo. Utilizando la terminología de **Reichenbach**, diremos que depende del conocimiento avanzado y no del conocimiento primitivo. Es necesario concluir, por tanto, que o bien la justificación de la inducción es circular, o bien se apoya en presupuestos ontológicos.

Correspondería a **Katz** dar todo su alcance a este argumento. En toda justificación de la inducción, el problema esencial es justificar la elección de una de las reglas convergentes[20]. Pero este problema, denominado por **Katz** "problema de las reglas convergentes", no puede recibir solución. En efecto, no es posible determinar el número medio de observaciones necesarias para obtener una conclusión correcta

[18] Cf. *C.I.M.*, § 19-24.

[19] Depende de una cantidad de medida que **Carnap** llama el grado de homogeneidad del universo.

[20] *P.I.S.*, p. 79.

cuando se utiliza una regla determinada sin conocer la probabilidad que se trata precisamente de determinar[21]. El argumento es enteramente general y se aplica a justificaciones de la inducción distintas de las propuestas por **Reichenbach**. Así, **Katz** lo aplica a una argumentación de **Kemeny**, quien intentaba constituir una teoría de la inducción que deje un puesto a la idea de simplicidad[22]. La idea de **Kemeny** era la siguiente: definido un orden de simplicidad sobre el conjunto de hipótesis concurrentes, se retendrá la más simple de las hipótesis compatibles con las observaciones recogidas, estando definida la compatibilidad por el hecho de que la hipótesis no convierte en muy improbables los datos de observación. Ese esquema se aplica, por otra parte, a problemas diferentes de la determinación de una frecuencia-límite (por ejemplo, al trazado de una curva polinomial). Bajo ciertas hipótesis, **Kemeny** puede establecer que, cuando se acumulan las observaciones, este procedimiento lleva necesariamente a retener la hipótesis que es verdadera. El "problema de las reglas convergentes" se plantea aquí bajo la forma siguiente: se obtendría la misma conclusión si se tomara un orden cualquiera que tenga las propiedades formales del orden de simplicidad retenido por **Kemeny**; la cuestión es, pues, saber qué orden hay que elegir. Está claro que se impone la elección del orden que permite concluir más rápidamente. Pero **Katz** establece que este orden no puede determinarse en tanto que se ignore la ley que la inducción tiene la obligación de establecer. Por eso concluye en una imposibilidad radical de justificar la inducción.

Es preciso hacer notar, además, que desde el instante en que no nos contentemos con una justificación asintótica de la inducción, la suficiencia de la regla de enumeración debe ponerse en duda. No sólo no se puede establecer la superioridad de la regla de inducción sobre las otras reglas, sino que ni siquiera es cierto que tenga buen éxito. De manera más precisa, no se puede calcular su probabilidad de éxito cuando se está en posesión de un número de observaciones determinado. Hemos visto cómo **Reichenbach** introduce el concepto de límite práctico para escapar a esta dificultad. Pero apenas podemos ilusionarnos acerca del valor de esta solución. Decir que una frecuencia tiene un límite práctico es decir que tiene un límite cuyo conocimiento no excede el poder del hombre. Sin embargo, como hace notar **Katz**[23], no se requiere en absoluto que este límite pueda conocerse por aplicación de la regla de inducción. No se excluye que únicamente otros procedimientos sean aptos para hacérnoslo conocer. En suma, el universo puede ser "predicable" y la regla de inducción consagrada al fracaso. Es claro que no es posible modificar la definición del concepto de límite práctico y decidir que implica que el límite puede conocerse por aplicación de la regla de inducción, pues la introducción de ese concepto equivaldría entonces a una pura petición de principio.

Además, esta sustitución del concepto de límite por el concepto de límite prácti-

[21] *P.I.S.*, p. 96. En realidad, esta determinación sólo es posible si se conoce la ley de distribución *a priori* de esta probabilidad y diversos caracteres de la serie.
[22] Cf. *U.S.I.*
[23] *P.I.S.*, § 3.4, p. 61.

co pone en cuestión toda la doctrina del progreso de la inducción, dado que hay que modificar enteramente la teoría de la probabilidad. Por ejemplo, es cierto que los axiomas de orden ya no son válidos. **Reichenbach** se contenta con constatar que sólo valdrán de modo "aproximativo" y que un cierto número de resultados no serán válidos sino con un intervalo de exactitud aproximadamente[24]. Lo menos que se puede decir de una respuesta semejante es que deja que desear en cuanto a rigor. Se tiene derecho a pedir que toda la doctrina sea reconstruida de manera efectiva, con las modificaciones necesarias, sobre esta nueva base. No basta con afirmar que el concepto de límite es únicamente una "idealización" del concepto de límite práctico y que se impone una "finitización" de los enunciados de convergencia[25]; también es preciso efectuarla.

El hecho de que **Reichenbach** haya constituido su teoría de la inducción fundándola sobre el concepto de límite y sustituya *in extremis* este concepto por otro concepto genera sospechas. Parece que la introducción del concepto de límite práctico y el vaivén de lo finito a lo infinito que instaura no tengan sino una función: enmascarar la insuficiencia flagrante de la justificación de la regla de inducción que se ha propuesto. El uso del concepto de probabilidad exige que se hable de frecuencia-límite, la justificación de la regla de inducción que se hable de límite práctico. **Reichenbach** no constituye, como debiera, una teoría de la probabilidad fundada sobre el concepto de límite práctico. Por otra parte, nada prueba que la empresa sea posible. En definitiva, el recurso al concepto de límite práctico prueba que es incapaz de integrar una regla de inducción acompañada de una justificación en una lógica inductiva.

En esas condiciones, ¿qué queda de la justificación de la inducción? Nada más que la idea introducida por **Peirce**: la inducción es auto-correctiva. Y aun es preciso tomar este enunciado en un sentido débil. No aporta sino una justificación asintótica de la regla de enumeración, asegurando simplemente que su aplicación reiterada conducirá al éxito. No es, por tanto, de ningún interés para los observadores finitos que somos nosotros, ni enseña nada sobre la eficacia de esta regla cuando se aplica a un conjunto determinado de datos experimentales. En ningún momento se ha propuesto un argumento sólido que confiera a la regla de enumeración una superioridad sobre las otras reglas, o más exactamente, los únicos argumentos esgrimidos dependen del conjunto de esa lógica inductiva cuyas insuficiencias hemos denunciado.

La idea de una defensa de la inducción, único modo de justificación, dado que su validación es imposible, podía parecer seductora. No ha culminado en nada y, de acuerdo con **Katz**, nos vemos impulsados a pensar que toda defensa de la inducción volvería a encontrar los mismos obstáculos. En todo caso, **Reichenbach** no ha aportado en absoluto esa justificación de la inducción que seguía siendo el único resulta-

[24] *T.P.*, § 66, p. 347.
[25] *Ibid.*

do importante de su doctrina que no habíamos contestado. No ha probado, como pretende hacerlo, que "si los métodos científicos no pueden proporcionar un conocimiento del futuro, son suficientes para justificar la acción"[26].

[26] *T.P.*, § 91, p. 480.

TERCERA PARTE

Las teorías del grado de confirmación

CAPITULO IX

SIGNIFICACION Y USO DEL CONCEPTO METALOGICO DE PROBABILIDAD

Una lógica inductiva fundada sobre la concepción frecuencial identifica probabilidad de proposiciones y probabilidad de sucesos. Exige de todo enunciado de probabilidad que se pueda transcribir en el lenguaje-objeto. Hemos visto el carácter ruinoso de este requisito. ¿Hay que quedarse en este proceso verbal de fracaso? ¿Es la definición frecuencial de probabilidad, por tanto, la única posible y está demostrada la imposibilidad de una lógica inductiva probabilitaria?

Incluso si se establece que la definición frecuencial es la única capaz de dar un contenido empírico a los enunciados de probabilidad, se impone una respuesta negativa. Nada excluye que un enunciado sin contenido fáctico tenga sentido. Para que ocurra así, basta con que pertenezca a un sistema formal. Pero la coherencia de la teoría formal de probabilidades está fuera de discusión y hemos establecido que es posible definir un concepto metalógico de probabilidad[1]. La determinación de una medida sobre un álgebra de **Boole** de clases de fórmulas no tropieza con ningún obstáculo. Es decir, otra vía permanece abierta.

Pero hay más. Como hemos dicho ya[2], la utilización del concepto metalógico de probabilidad no impide en absoluto que se interpreten ciertos *enunciados* de probabilidad como aserciones concernientes a frecuencias. Todo lo que se requiere es que los enunciados que reciban esta interpretación pertenezcan al lenguaje-objeto. En ese caso, la determinación de su propia probabilidad, en el sentido metalógico del término, no está excluida. Es pues posible articular, una sobre otra, teorías que tratan de dos conceptos distintos de probabilidad. Por otra parte, se tiene derecho a pretender que la teoría metalógica es la única que puede dar las reglas de un uso coherente de la definición frecuencial. En la medida en que los enucniados de probabilidad conciernen a frecuencias en clases infinitas, no pueden ser verificados empíricamente. Sólo son probables. **Reichenbach** llamaba "propuestas" a tales enunciados; definía un peso de las propuestas y esperaba que la propia teoría frecuencial diera los medios para constituir una lógica de las propuestas. Ahí radica su error; el fracaso de su doctrina, ¿no prueba acaso que el uso del concepto frecuencial exige que se apele a otra definición de probabilidad? **Carnap** hace observar, con buen

1 Cf. cap. IV.
2 Cf. cap. IV, § 3.

juicio, que la doctrina de **Reichenbach** reposa sobre una confusión entre la probabilidad frecuencial y la estimación de esa probabilidad[3]. Para fundamentar la ciencia probabilitaria, sería necesario distinguir la una de la otra y la noción de estimación presupondría el concepto metalógico de probabilidad[4]. Formidable argumento. No sólo se establece la compatibilidad de la teoría metalógica con la definición frecuencial, cuya validez en un campo de aplicación determinado, que comprenderá circunstancialmente todos los usos empíricos de la noción de probabilidad, no se cuestiona, sino que también se prueba que la primera es necesaria para explotar la segunda.

Los criterios positivistas de significación más estrictos no autorizan la exclusión de una teoría metalógica de la probabilidad cuya construcción no impida tener la definición frecuencial por perfectamente adaptada a ciertos usos del concepto de probabilidad. En esas condiciones, ¿cómo explicaremos que tantos autores se hayan negado a tomarla en consideración? La respuesta es simple: por una parte, temían que la teoría metalógica enmascarase un retorno a las definiciones subjetivistas de la probabilidad, a sus cortejos de esquemas bayesianos, a las aplicaciones indefendibles del principio de indiferencia; por otra parte, no veían cuál podría ser el uso empírico de los enunciados de probabilidad sin contenido fáctico. Por eso la construcción de una disciplina habilitada para el tratamiento del concepto metalógico de probabilidad les parecía que dependía de la actividad lúdica.

En consecuencia, interesa mostrar que esos temores eran vanos, al menos parcialmente. Nos será preciso probar, ante todo, que la definición metalógica no tiene el subjetivismo como término final inevitable. El dilema: definición frecuencial o subjetivismo, no tiene fundamento en absoluto. Por lo tanto, si existen filosofías subjetivistas de la probabilidad lógica, existen igualmente concepciones subjetivistas de la lógica deductiva que les son rigurosamente paralelas y que no sirven de argumento para impedir el desarrollo de esta última disciplina. Sigue siendo posible una concepción de la probabilidad metalógica tan depurada de todo subjetivismo como lo están las concepciones modernas de la lógica deductiva. Cierto que, en esta doctrina, los enunciados de probabilidad están desprovistos de todo contenido fáctico; pero, como se verá, no carecen por eso de uso empírico. Tal es el resultado al que ha llevado el análisis crítico de la definición tradicional de la probabilidad en términos de grados de creencias racionales.

1. Del grado de creencia al grado de confirmación.

La interpretación subjetiva de la probabilidad pertenece a la tradición. **Bernouilli**, quien estima todos los sucesos como objetivamente necesarios, define la probabili-

[3] *L.F.P.*, § 41, pp. 175-177.

[4] Una estimación es una esperanza matemática y la probabilidad que interviene en el cálculo de esta esperanza es una probabilidad en el sentido metalógico del término y no una frecuencia. (Cf. *L.F.P.* § 100, pp. 524-528.)

dad como "grado de certeza" y afirma que este concepto recibe sentido[5] únicamente por relación con un sujeto determinado. **Laplace** profesa una doctrina semejante en esta materia. La afirmación del determinismo físico le impide atribuir probabilidad a los sucesos. Pero, ¿qué mide una probabilidad, si sólo puede tener sentido subjetivo? Se ha dicho que la probabilidad atribuida a un suceso o a una proposición mide el grado de creencia en la producción del suceso o en la verdad de la proposición. Concepción paralela a la concepción psicologista de la lógica deductiva; las leyes de la lógica deductiva serían las leyes positivas de la inteligencia (facultad psicológica, realidad mundana) concernientes a los fenómenos de juicio, es decir, a los fenómenos de creencia total; de manera análoga, las leyes de la probabilidad regularían los fenómenos de creencia parcial.

Se comprende fácilmente que una teoría de la probabilidad lógica haya disgustado en la medida en que se creía que implicaba necesariamente la adhesión a una concepción de ese tipo. En efecto, tanto en materia de probabilidad como en lo demás, el subjetivismo es ruinoso para la teoría del conocimiento. Es posible oponerle todos los argumentos decisivos que **Husserl** dirigía al psicologismo.

El grado de creencia que mide la probabilidad es un fenómeno mental. Concebido como un momento de lo vivido, como un "feeling", no es medible. Sólo se podrá medirlo indirectamente. Por ejemplo, se decide convencionalmente que la probabilidad que un sujeto atribuye a un suceso se mide por el cociente máximo al que está dispuesto a apostar sobre la producción del suceso. Si está dispuesto a apostar a tres contra dos, pero no a una tasa más desfavorable, se dirá que su grado de creencia en la producción del suceso es igual a 2/5. También sería preciso asegurarse de que así se ha definido una medida estable para un sujeto determinado. Es probable que la tasa varíe con el montante del envite. La consideración de las utilidades permite, circunstancialmente, evitar la dificultad. Como quiera que sea, se habrá definido simplemente el grado de creencia de un sujeto determinado en un momento determinado. Nada asegura que el mismo sujeto en otro momento, u otro sujeto, haga la misma estimación, incluso si dispusiera de los mismos datos para juzgar acerca de la plausibilidad del suceso. Apenas se ve cuál puede ser el uso de la introducción de probabilidades así concebidas en una ciencia de la naturaleza. Se ve todavía menos qué es lo que justifica los principios sobre los que se apoya la teoría de probabilidades. ¿Se componen los grados de creencia de un sujeto determinado como lo exigen los axiomas de esta teoría? Es dudoso, ¡a no ser que el propio sujeto sobre el cual se experimenta sea probabilista! Lo menos que se puede decir es que no se aporta ninguna prueba de su verdad experimental. Hay, en el psicologismo, se aplique a la teoría de probabilidades o a la lógica deductiva, una creencia ingenua en la rectitud natural del pensamiento que nada justifica.

En todo caso, en una perspectiva semejante, los axiomas de probabilidad no estarían fundados, si lo estuvieran, sino a título de leyes positivas obtenidas por

[5] *A.C.*, Pars quarta, C. primus, pp. 210-211.

inducción. Pero, por otra parte, se proclama que los principios de probabilidad son indispensables para fundar las ciencias inductivas. Hay ahí un círculo manifiesto, del mismo tipo que el que **Husserl** ponía en evidencia en la empresa que consiste en fundar la lógica sobre la psicología. Querer fundamentar las leyes de la lógica a título de leyes positivas, se trate de la lógica deductiva o de la lógica inductiva, es ignorar deliberadamente la distinción fundamental entre leyes positivas y leyes teóricas ideales[6]. Cierto que no es contradictorio estimar las leyes de la lógica deductiva como leyes ideales y las de probabilidad como leyes positivas que dependen de la psicología. Pero esto es renunciar a hacer una lógica[7] de la teoría de probabilidades, y abandonar la esperanza de verla contribuir a la solución de los problemas epistemológicos que plantea la inducción. El subjetivismo vacía de sentido la idea de una lógica inductiva y de uso la teoría matemática de probabilidades.

Muchos autores que han defendido una concepción subjetivista de la probabilidad han sido conscientes de la insuficiencia de su posición. Por eso la han moderado. Del mismo modo que se afirmaba que las leyes lógicas no regulan todos nuestros juicios, que son leyes necesarias que no pueden aplicarse sino en ciertas condiciones específicas, así se sostiene que las leyes de probabilidad son las del grado de creencia *razonable*. **Keynes** escribe: "La teoría de la probabilidad... tiene por objeto los grados de creencia que es racional admitir en condiciones dadas, y no simplemente los grados de creencia actuales de individuos particulares, que pueden ser racionales o no"[8], y precisa que merece su nombre la lógica precisamente en este sentido.

Esta concepción puede ponerse en paralelo con la que convierte a las leyes de la lógica deductiva en las leyes *normativas* del pensamiento y que constituye una solución espúrea, que enmascara la esencia de la lógica. Al estimar la lógica como una disciplina normativa, se corre el riesgo de olvidar que "tiene un contenido teórico disociable de toda normalización", como dice **Husserl**[9]. Definir la lógica en términos de arte, más bien que de ciencia; de normas, antes que de leyes, es una manera artificiosa de determinar su esencia. Ocurre lo mismo en lo que atañe a las concepciones de la probabilidad: el "psicologismo cualificado" –tal es el nombre que da **Carnap** a la doctrina que estudiamos– es poco satisfactorio. La identificación de las leyes de probabilidad con las leyes a las que se someten los grados de creencias racionales es insuficiente en tanto que no se haya definido de modo preciso lo que se entiende por racionalidad de un sistema de creencia. A falta de una definición

---

[6] Hagamos notar que, según **Husserl** la circularidad de la argumentación psicologista no constituye una refutación radical (Cf. *P.L.P.*, cap. 3, § 19, p. 61). El verdadero argumento –y **Husserl** se aproxima mucho a **Frege** en este punto– radicaría en la irreductibilidad evidente de una ley ideal a una ley positiva y en la imposibilidad de pensar la segunda sin pensar la primera. (Cf. *P.L.P.*, cap. 4, § 23, pp. 79-80.)

[7] **Husserl** incluye "los principios del cálculo de probabilidades" en el número de las "leyes lógicas". (*P.L.P.*, cap. 4, § 21, p. 66.)

[8] *T.P.*, cap. 1, § 2, p. 4.

[9] *P.L.P.*, cap. 2, § 16, p. 49.

estricta, se corre el riesgo de dar la impresión de una elección arbitraria cuando se pretende imponer las leyes de probabilidad a los grados de creencia como condiciones de su racionalidad. Así, **Keynes**, quien tiene a la noción de probabilidad por una noción primera, indefinible[10], invoca la intuición lógica, la evidencia, para determinar las leyes que confieren la racionalidad a los grados de creencia[11], exponiéndose a la crítica. Decir que los axiomas de probabilidad son las leyes a las que se sujetan los grados de creencia actuales es absurdo; corregir esta definición hablando de las normas de su racionalidad sigue siendo todavía insuficiente.

De hecho, el ejemplo de la lógica deductiva puede guiar la elaboración de una concepción aceptable de la probabilidad lógica. La lógica ha sido definida de manera correcta desde el día en que se ha visto en ella una ciencia teórica cuyo objeto es no el juicio, fenómeno psicológico, sino la proposición apuntada en el juicio, o su expresión lingüística. La determinación de las leyes relativas a la no-contradicción de un sistema de proposiciones constituye una de sus tareas esenciales. Las normas, respecto de las cuales se creía falsamente que componían el contenido de la lógica, son únicamente reglas que pueden derivarse de esas leyes y cuyo acatamiento se impone si se quiere evitar la contradicción. En tanto que la definición de la lógica como ciencia normativa estaba todavía amenazada por el psicologismo, esta concepción se desprende completamente de él. Falta transponerla al dominio de la filosofía de lo probable, lo que exige, naturalmente, una ampliación de la idea de no-contradicción.

Llamemos *opinión* a la asignación de una probabilidad a una proposición. Diremos que una opinión es condicional si se trata de una asignación de probabilidad condicional, relativa a una pareja de proposiciones; en el caso opuesto, hablaremos eventualmente de opiniones absolutas. Se puede decir que los axiomas de probabilidad metalógica expresan las condiciones necesarias para que un sistema de opiniones sea coherente. Todo el problema es dar un contenido a la idea de coherencia de un sistema de opiniones. Si se tratara de aserciones, y no de opiniones, la respuesta sería inmediata: la coherencia significa la no-contradicción. Pero, ¿qué ocurre en el caso presente? En realidad, sólo se puede resolver este problema mediante un rodeo bastante complejo.

A partir de las leyes lógicas pueden concluirse normas destinadas a evitar la incoherencia de nuestros juicios. Estas normas son asimismo reglas de acción, en el sentido de que una actividad fundada en un sistema de juicios incoherentes estaría abocada al fracaso. Esta constatación no implica ningún pragmatismo, ninguna reducción del pensamiento recto a un simple instrumento de acción. Significa simplemente que las leyes lógicas figuran entre el número de las reglas de la acción eficaz, que una de sus funciones es ser reglas de acción, y no que es ésa su única función. Ahora bien, precisamente, la teoría de la acción eficaz servirá, no para fundamentar la lógi-

[10] *T.P.*, cap. 1, § 8, p. 8.

[11] Habla de una "facultad de reconocer inmediatamente muchas relaciones de probabilidad". (*T.P.*, cap. 4, § 12, p. 53.)

ca de lo probable, sino para dar un contenido a la idea de coherencia de un sistema de opiniones. Basta para eso con volver a la idea de cociente de apuesta, utilizada en la medida de los pretendidos grados de creencia, y considerar este tipo particular de acción que es la apuesta.

Sea S una cantidad cualquiera (positiva, negativa o nula) que denominaremos el envite; h, una fórmula; p, un número comprendido entre 0 y 1. Un sujeto X, que apuesta sobre h el envite S al *cociente* p, pierde pS si h es falsa; y gana $(1-p)S$, si h es verdadera. La razón $1-p/p$ se llama la *tasa* de la apuesta. Naturalmente, apostar $-S$ sobre h al cociente p viene a ser apostar S sobre $\sim h$ al cociente $(1-p)$. Introduzcamos el concepto de apuesta condicional: siendo e y h fórmulas, una apuesta sobre h condicionada por e es una apuesta que se anula si e es falsa. Supongamos que las probabilidades asignadas en un sistema de opiniones se utilicen como cocientes de apuesta, siendo esas apuestas absolutas o condicionales según la naturaleza de las opiniones. Diremos que el sistema es *coherente* si no existe ninguna disposición de los envites que lleve a una pérdida inevitable al sujeto que la adopte como sistema de cocientes de apuestas. Precisemos que llamamos inevitable a una pérdida que se produce en todos los casos, excluidos aquéllos en que todas las apuestas se anulan. Será *estrictamente coherente* si no existe ninguna disposición de los envites que, excluyendo la ganancia en todos los casos, en ciertas circunstancias conduzca a una pérdida inevitable.

La idea directriz que lleva a esta definición es muy simple: sería incoherente en sus opiniones un sujeto que apostara a tasas tales que un jugador hábil tuviera la certeza de ganarle. Para que la coherencia sea estricta, es preciso que el eventual adversario no pueda esperar ganar sin correr riesgo. Así hemos sustituido la noción difusa de racionalidad de los grados de creencia por el concepto preciso de coherencia de un sistema de opiniones. La coherencia se define a partir de las propiedades matemáticas de los cocientes de apuesta que determinan esas opiniones. Puede, pues, constituir el objeto de investigaciones teóricas.

Contrariamente a lo que se podría pensar, no se trata en modo alguno de volver a la definición de probabilidad como medida del grado de creencia racional y de introducir la apuesta como procedimiento de medida del grado de creencia, sino simplemente de *dar un contenido* a la idea de coherencia de un sistema de opiniones. Nuestro análisis ha sido formal de parte a parte; no comporta ninguna asunción cuya validez correspondería determinar a alguna investigación experimental. Ni hemos supuesto la existencia de algún fenómeno psicológico llamado grado de creencia, ni hemos hecho la hipótesis de que la determinación del cociente máximo al que un jugador acepta apostar constituya una medida adecuada de él. Hemos propuesto, sencillamente, una definición del concepto de opiniones coherentes y podemos invocar el derecho de definir libremente un concepto formal, a reserva de que la definición sea no-contradictoria.

No cabe ninguna duda acerca de que la coherencia, en el sentido estricto dado a este término, sea una condición necesaria de la racionalidad de un sistema de proba-

bilidades metalógicas. En ese sentido, nuestra definición es adecuada: corresponde a la idea intuitiva que tenemos de un sistema racional de asignaciones de probabilidades. Saber si la agota es otro problema, y se puede dudar de ello cuando se ve que tolera la asignación de cualquier probabilidad a una proposición aislada (a reserva de que esta probabilidad sea distinta de 0 y de 1 si la proposición no está lógicamente determinada). Veremos, en el parágrafo siguiente, qué débiles son las condiciones que bastan para asegurar la coherencia de un sistema.

Pero lo importante, en el proceso que acabamos de describir, es que permite constituir una teoría metalógica de la probabilidad depurada de todo psicologismo y que, sin embargo, retoma todos los elementos positivos contenidos en la idea de grado de creencia racional. Se patentiza entonces que, si los enunciados de probabilidad carecen de *contenido fáctico,* no están privados de *uso empírico.* Al considerar ese tipo de acción particular que es la apuesta, hemos podido dar un sentido preciso a la idea de fracaso en la actividad y definir la coherencia como una condición necesaria del éxito. Se sigue de ahí que las leyes que deriven de la coherencia y que se impongan a la probabilidad metalógica expresarán los requisitos que deben satisfacerse si se quiere que una teoría metalógica de la probabilidad funde una praxeología.

Sin embargo, sea cual sea su interés, el procedimiento propuesto para dar un uso al concepto metalógico de probabilidad puede parecer artificial. Si ese concepto recibe un uso, es únicamente en el seno de una teoría que trata de ese tipo muy particular de acción que es la apuesta. Además, el análisis que se ha hecho de la apuesta es muy sumario: reposa sobre la consideración de las ganancias absolutas y no de las utilidades. Se comprende fácilmente que se haya intentado derivar la axiomática de la probabilidad metalógica de una teoría de la coherencia de la acción a la vez más general y más natural. Para lograr ese resultado, era necesario partir de una doctrina de la decisión que no se limitara al solo caso de elección entre cocientes de apuesta y que tuviera en cuenta funciones de utilidad bien conocidas por los economistas. **Ramsey**, que partía del concepto de "bienes" acerca de los cuales suponía que se ordenan por una relación de preferencia (que formalmente es un pre-orden) había sido el precursor de una teoría semejante. **Savage** la ha desarrollado sistemáticamente. Según **Savage**, los conceptos fundamentales de una teoría de la acción serían los de *acto, estado del mundo,* y *consecuencia de un acto.* El término mundo debe tomarse aquí en un sentido muy restrictivo y relativo: el mundo es el conjunto de las circunstancias que pueden tener una influencia sobre el resultado de un tipo de actos determinado. Un acto será una función que aplique los estados del mundo en el conjunto de las consecuencias[12]. Se supone que el conjunto de los actos está ordenado totalmente por una relación: la relación de preferencia[13]. De este orden

[12] *F.S.*, cap. 2, § 5, p. 14.

[13] *F.S.*, cap. 2, § 6, p. 18, P. 1: De hecho, esta relación no es sino un pre-orden: $f \leqslant g$ y $g \leqslant f$ no comporta la identidad de f y de g.

se *deduce* un orden de preferencia entre las consecuencias[14]. La preferencia entre los bienes producidos por la elección de una acción determinada es, pues, en este sistema, únicamente una noción secundaria y derivada. Ocurriendo esto, supongamos que el conocimiento que posee un sujeto le permite saber que están excluidos ciertos estados del mundo; este conocimiento puede modificar sus preferencias. Es posible, entonces, dar un sentido a la noción de preferencia entre actos, al conocerse[15] un suceso determinado. Consideremos tipos de actos particulares que dan, para todo estado del mundo en que h es verdadera, una consecuencia constante (en el sentido de la relación de preferencia) f; y una consecuencia f' constante si h es falsa; a partir de las relaciones de preferencia entre f y f' previamente determinadas, y de las preferencias que expresa el sujeto entre los actos de ese tipo, se llega a dar un contenido a la noción de probabilidad. De la axiomática, bastante natural, concerniente a la relación de preferencia entre los actos, se deduce una axiomática de la probabilidad ordinal. Postulados más fuertes permiten derivar los axiomas de la probabilidad numérica[16].

Para un estudio de la teoría de la decisión, la obra de **Savage** merecería un examen mucho más amplio que este breve resumen, pero nuestra intención es otra: se trata, simplemente, de mostrar que se puede dar a la idea de coherencia en la acción un contenido mucho más rico y mucho más natural que el que adquiere con la sola consideración de las apuestas. Es, entonces, posible derivar de la definición de coherencia que se haya propuesto condiciones que se impondrán a la probabilidad metalógica en la medida en que se espere de ese concepto que sea utilizable en una teoría de la acción. En efecto, sobre el plano formal, no se podía reprochar nada a la idea de cociente de apuesta; pero era fácil de denunciar la endeblez del uso así conferido a la teoría metalógica de probabilidades. Las investigaciones del tipo de las de **Savage** tienen por propósito responder a esos temores: la noción de apuesta se inserta en una teoría general de la acción, una vez definido el cociente de apuesta a partir de otras nociones (la preferencia entre actos). Ese contexto no altera el uso que la consideración de las tasas de apuesta confiere a la noción de coherencia de las opiniones; lo enriquece. Sobre el plano de la investigación epistemológica, que es el nuestro, nos bastará, hasta que se pruebe lo contrario, conocer la posibilidad de tales enriquecimientos.

En las páginas que preceden, hemos establecido que una teoría de la probabili-

---

[14] *F.S.*, cap. 2, § 7, p. 25, P. 2. Siendo actos f y f', g y g' consecuencias, se establecerá $g \leqslant g'$ si y sólo si $f \leqslant f'$ y si $f(s) = g$ y $f'(s) = g'$, sea cual sea s, con $s \in S$ (S es el conjunto de los estados del mundo). Dicho de otra manera, para ordenar las consecuencias, se toman en consideración actos que tienen igual consecuencia, sea cual sea el estado del mundo; el orden de las consecuencias será entonces el de los actos.

[15] *F.S.*, cap. 2, § 7, p. 22. Se supone que el conjunto de los estados posibles del universo está restringido por el conocimiento del sujeto. X prefiere f a g conocido h, si prefiere f' a g', siendo f' y g' actos que coinciden con f y g respectivamente, si se tiene h; y que coinciden entre ellos, si se tiene $\sim h$.

[16] Cf. esencialmente *F.S.*, cap. 3, § 4, pp. 39-40, P. 6.

dad metalógica puede recibir un uso aunque sus enunciados carezcan de contenido fáctico. Este uso, cuya ausencia hacía tenerla por sospechosa, puede determinarse sin que se vuelva a las concepciones subjetivistas de la tradición. Nos falta por investigar en qué condiciones un sistema de opiniones es coherente o estrictamente coherente. Para simplificar el vocabulario y seguir el uso corriente, llamemos *grado de confirmación* a una probabilidad metalógica condicional. Un grado de confirmación se define, por tanto, por una función numérica que toma sus valores en el intervalo [0, 1], cuyos dos argumentos son fórmulas y que satisface los axiomas de probabilidad. Una función de este tipo se llama función de confirmación. Vamos a establecer que la condición necesaria y suficiente de que un sistema de opiniones sea coherente es que se confunda con los valores de una función de confirmación. Así, los axiomas de probabilidad, al expresar la coherencia de las opiniones, determinarán las condiciones en las cuales pueden introducirse probabilidades metalógicas en una praxeología.

2. La coherencia de las opiniones y la axiomática de la probabilidad

De **Finetti** es quien ha elaborado la definición de coherencia que acabamos de exponer. Es igualmente él quien tuvo la idea de deducir de esta definición los axiomas de probabilidad[17]. Sin embargo, hay que hacer notar que **Ramsay**, que se situaba en una perspectiva ligeramente diferente dado que partía del concepto de preferencia entre actos o bienes, había propuesto anteriormente una definición de la coherencia equivalente a la de de **Finetti**[18]. Pero esos primeros trabajos han sido completados: Abner **Shimony** ha sustituido el concepto de coherencia por la noción de coherencia estricta[19]. En tanto que de **Finetti** derivaba de la coherencia un sistema de axiomas débiles, **Shimony** deriva un sistema más fuerte de la coherencia estricta. Además, enuncia condiciones concernientes a la coherencia de un sistema de opiniones considerado simplemente como un conjunto ordenado; se confunden con los axiomas de la probabilidad ordinal propuestos por **Koopman**. Por otra parte, se han obtenido resultados esenciales concernientes a la *suficiencia* de esos axiomas, la definición de una función de confirmación completa, la posibilidad de completar una función que no lo está. Los trabajos conjuntos de **Shimony**, **Lehmann**[20], **Kemeny**[21], cuya publicación es casi simultánea, han permitido perfeccionar esta teoría, cuyos resultados esenciales habían sido obtenidos por de **Finetti**. Durante ese tiempo, **Savage** encontraba resultados casi idénticos, a partir de una conceptualización diferente[22]. Derivaba, del concepto de acto y de la relación de preferencia en-

[17] Cf. *P.L.S.*, cap. 1 (*passim*).
[18] Cf. *Truth and probability*, § 3 (*Degrees of belief*), en *F.M.*
[19] Cf. *C.A.C.*
[20] Cf. *C.R.B.*
[21] Cf. *F.B.P.*
[22] Cf. *F.S.*

tre actos, una definición de la probabilidad que él calificaba de subjetiva y probaba que esta probabilidad debía satisfacer los axiomas tradicionales.

En las páginas que siguen, expondremos los principales resultados obtenidos a partir del concepto de coherencia de un sistema de opiniones. El afán de ser claros y de aligerar la exposición, nos fuerza a sacrificar la fidelidad histórica unificando terminología y notaciones de los diferentes autores.

Sea $\mathscr{S}$ un sistema semántico. Suponemos que los conectores proposicionales pertenecen a su vocabulario y que son válidos los tradicionales esquemas de axiomas del cálculo de proposiciones. Se considera un conjunto $\mathscr{D}$ de parejas de fórmulas de $\mathscr{S}$; las primeras proyecciones de los elementos de $\mathscr{D}$ constituyen un conjunto cerrado para los conectores $\sim$, V, e &[23]. Sea, además, un sistema de opiniones relativas a elementos de $\mathscr{D}$. Designemos por $q(h_i, e_i)$ el cociente de apuesta que determina la opinión relativa a la pareja $\langle h_i, e_i \rangle$. Sea $\mathscr{D}_0$ el sub-conjunto de $\mathscr{D}$ para el que las opiniones definen cocientes de apuesta. El problema es saber en qué condiciones el sistema de opiniones definido sobre $\mathscr{D}_0$ es coherente o estrictamente coherente. Hagamos notar que, en lo que sigue, se supone que los cocientes de apuesta considerados pertenecen a $\mathscr{D}_0$ (dicho de otro modo, están definidos) y que la segunda proyección de las parejas $\langle h_i, e_i \rangle$ no es una fórmula lógicamente falsa[24]. Se establecen muy fácilmente los siguientes axiomas, a título de condiciones de la coherencia:

(A. 1) Si $\vdash h \equiv h'$ y $\vdash e \equiv e'$, entonces $q(h, e) = q(h', e')$.

En efecto, establezcamos $q = q(h, e)$ y $q' = q(h', e')$ y $q < q'$. Un sujeto apuesta a estos cocientes $-S$ sobre h, si e; y S sobre h', si e', con $S > 0$. Decimos que está seguro de perder. En efecto, si e es falsa, e' también, y las apuestas se anulan. En el caso contrario, si h es verdadera, y por tanto h', gana:

$$\frac{1-q}{q}(-S) + \frac{1-q'}{q'} S = \frac{q-q'}{qq'} S$$

lo que constituye una ganancia negativa, por tanto, una pérdida. Si h y h' son falsas, pierde:

$$-qS + q'S = (q' - q)S$$

lo que constituye una pérdida positiva.

(A.2) $0 \leqslant q(h, e) \leqslant 1$.

---

[23] En el cociente del conjunto de las fórmulas por la relación de L-equivalencia, $\mathscr{D}$ comprende, pues, todos los elementos de un conjunto de clases que constituyen un álgebra de **Boole** para las leyes cocientes.

[24] Si no, las apuestas condicionales correspondientes se anularían siempre y los cocientes correspondientes quedaría indeterminados.

En efecto, si $q < 0$ basta con elegir $S < 0$ y si $q > 1$, $S > 0$, para que el sujeto que adopte q como cociente de apuesta esté seguro de perder.

(A.3) $\vdash e \supset h$ implica $q(h, e) = 1$.

(A.4) $\vdash e \supset \sim (h \,\&\, h')$ entonces $q(h \vee \sim h', e) = q(h, e) + q(h', e)$.

(A.5) $q(h \,\&\, h', e) = q(h, e), q(h', h \,\&\, e)$.

Estos tres axiomas se demuestran por consideraciones algebraicas elementales. A título de ejemplo, demos la demostración de A.4. Establezcamos $q(h, e) = q_1$, $q(h', e) = q_2$, $q(h \vee h', e) = q_3$.

Sean envites S_1, S_2, S_3 respectivamente sobre h, h' y $h \vee h'$. Excluyamos el caso en que e fuera falso y todas las apuestas se anularan. Tres contingencias son entonces posibles: h es verdadera y h' falsa; h falsa y h' verdadera; h y h' son falsas.

En estas tres contingencias, la ganancia de un sujeto que adopte esos cocientes de apuestas y proponga esos envites es respectivamente:

$$\begin{aligned} &(1 - q_1)S_1 - q_2S_2 + (1 - q_3)S_3 \\ &- q_1S_1 + (1 - q_2)S_2 + (1 - q_3)S_3 \\ &- q_1S_1 - q_2S_2 - q_3S_3 \end{aligned}$$

Designemos por p_{ij} el coeficiente de S_i en la j-ésima de las expresiones precedentes.

El problema es saber cuáles son las condiciones necesarias para que no se pueda resolver el sistema de ecuaciones en S_i: $\sum_{i=1}^{3} p_{ij}S_i = \alpha_j$ con α_j arbitrarias (y que podrían elegirse todas negativas). Está claro que el sistema tendría siempre soluciones si fuera un sistema de **Cramer**. La coherencia impone pues la condición $|p_{ij}| = 0$ y el desarrollo del determinante da $q_1 + q_2 - q_3 = 0$. De ahí el axioma 4.

Si consideramos ahora la condición de coherencia estricta, permite establecer que $q(h, e) = 1$ implica $e \vdash h$. En efecto, si un sujeto adopta, con S positivo, $q(h, e) = 1$ como cociente de apuestas, pierde S si se tiene $\sim h$ y e; y gana $(1 - 1)S = 0$ si se tiene h y e. Para que la coherencia sea estricta, es preciso que se excluya la primera contingencia, dicho de otro modo, que se tenga $e \vdash h$. Así, en el caso de la coherencia estricta, se puede sustituir el axioma débil A.3 por un axioma más fuerte que es el siguiente:

(A.3′) $q(h, e) = 1$ si y sólo si $e \vdash h$.

El conjunto de las condiciones precedentes (tomado con el axioma débil) constituye el sistema de axiomas al que debe satisfacer un grado de confirmación. Podemos pues concluir que, para que un sistema de opiniones sea coherente, es preciso que los cocientes de apuestas que determinan esas opiniones sean los valores de una función de confirmación. La coherencia estricta impone una condición suplementa-

ria que limita la elección de la función de confirmación[25]. Se puede demostrar, en el caso de la coherencia estricta como en el de la coherencia simple, la *suficiencia* de las condiciones enunciadas. Así se legitimará la identificación de la noción formal de grado de confirmación y la noción de los cocientes de apuesta determinados por un sistema de opiniones coherente.

Una demostración simple de la suficiencia de estas condiciones ha sido propuesta por **Kemeny**[26] en el doble caso de la coherencia simple y de la coherencia estricta; se consigue por algunas consideraciones algebraicas elementales. Pero sólo atañe al caso de un sistema de opiniones relativas a un dominio $\mathscr{D}_0$ finito y cerrado para las operaciones booleanas sobre el primer argumento de las parejas. **Lehmann** ha propuesto una demostración más general, pero más compleja, que únicamente se aplica al caso de la coherencia simple: Sea $\mathscr{D}$ un conjunto finito o enumerable de parejas de fórmulas, sometido a las mismas restricciones que precedentemente, en lo que atañe a los segundos argumentos y la clausura con respecto a las operaciones booleanas[27]. Una función de confirmación se dirá completa con respecto a $\mathscr{D}$ si su dominio de definición es $\mathscr{D}$. Se puede demostrar que una función de confirmación completa con respecto a $\mathscr{D}$ define un sistema de cocientes de apuesta coherentes[28] sobre *toda* parte $\mathscr{D}_0$ *finita* de $\mathscr{D}$. Además, una función de confirmación definida sobre una parte $\mathscr{D}_0$ de $\mathscr{D}$ puede siempre ser completada[29]. Este resultado es más fuerte que el establecido por **Kemeny**. Sea un sistema de opiniones infinito: retomando una denominación debida a **Shimony**[30], diremos que es *generalmente coherente* si todo conjunto finito que se extrae de él es coherente; se definiría del mismo modo la noción de *coherencia general estricta.* **Lehmann** establece, pues, que toda función de confirmación definida sobre un conjunto cuyo cardinal no sobrepase el enumerable determina un sistema de opiniones generalmente coherente.

Quedaría por tener en cuenta la condición de coherencia estricta. En el caso de los conjuntos finitos, basta con que una función de confirmación satisfaga (A.3′) para que determine opiniones estrictamente coherentes. Pero, desde la extensión al enumerable, la noción de coherencia estricta suscita dificultades que ha subrayado **Shimony**[31]. En efecto, no existe ningún conjunto enumerable de opiniones que satisfaga la condición de coherencia general estricta y que contenga un sub-conjunto

---

[25] Esta condición puede expresarse bajo la forma tal que concierna a la elección de las fórmulas de medida nula.

[26] *F.B.P.*, § 5, pp. 268-269 (*The converse theorem*).

[27] **Lehmann** introduce "funciones de posibilidad". Emplea así un vocabulario matemático en lugar de la terminología semántica que nosotros utilizamos. La restricción del conjunto de las funciones de posibilidad se suple con la introducción de reglas de verdad que permiten establecer que son lógicamente verdaderas fórmulas que no son tesis.

[28] *C.R.B.*, p. 256, T. 3.

[29] *C.R.B.*, p. 257 y sig. Naturalmente la compleción deja sitio a una arbitrariedad en la elección de ciertos valores de la función.

[30] *C.A.C.*, p. 18.

[31] *C.A.C.*, pp. 18-19.

enumerable del tipo siguiente: recorriendo los índices el conjunto de los enteros, se tiene $q(h_i, e) = q(h_j, e)$ para todos los índices i y j, $e \vdash \bigvee_{n \in A} h_n$, $e \vdash \sim (h_i \,\&\, h_j)$ (sean cuales sean i y j). Se demostraría del mismo modo la imposibilidad de un sistema que satisfaga la condición de coherencia general estricta y que, definido sobre un conjunto superior al enumerable, determine los cocientes de apuestas sobre una familia $\{\langle h_\alpha, e\rangle\}$ con $(h_\alpha)_{\alpha \in A}$ de potencia superior al enumerable, $e \vdash \sim (h_\alpha \,\&\, h_\beta)$ si $\alpha \neq \beta$, y $e \vdash \bigvee_{\alpha \in A} h_\alpha$. Estos resultados son la simple transcripción de teoremas bien conocidos de la teoría de probabilidades enumerables y de la teoría de probabilidades continuas. El segundo, a pesar de la apariencia contraria, es poco inquietante, dado que las condiciones de efectividad limitan al enumerable el conjunto de las fórmulas de un lenguaje determinado. El primero muestra la imposibilidad *lógica* de aplicar, en ciertos casos, el principio de indiferencia para determinar cocientes de apuesta, si se quiere que satisfagan la condición de coherencia general estricta.

Pero sean cuales sean esos resultados negativos que se encuentran desde que se sale del dominio de lo finito, de todas formas se establece que, en el caso en que una función de confirmación satisfaciera el conjunto de axiomas "fuerte", determinaría cocientes de apuesta estrictamente coherentes.

Al mostrar que los axiomas de la probabilidad metalógica constituyen las condiciones necesarias y suficientes de la coherencia de las opiniones, al probar la identidad entre las nociones de función de confirmación y de función de apuesta coherente, hemos probado que una teoría metalógica de la probabilidad no es vana, que tiene un uso empírico, incluso si los enunciados no tienen contenido fáctico. Este resultado se ha obtenido por un análisis riguroso de la idea de grado de creencia racional que ha permitido hacer la separación entre lo que, en ese concepto, depende de la psicología, o más generalmente, de la ciencia positiva, y lo que pertenece a las ciencias formales.

Sin embargo, la posibilidad de utilizar el concepto metalógico de probabilidad en un análisis lógico de la inducción queda por establecer. Al demostrar que los axiomas de probabilidad son las condiciones suficientes de la coherencia de las opiniones, hemos probado que no se podría extraer de esa idea de coherencia nada más que esos axiomas. Toda función de confirmación definida sobre un dominio $\mathscr{D}$ determina cocientes de apuestas coherentes en ese dominio. Se mantiene una arbitrariedad en la elección de una función de confirmación, arbitrariedad cuyos límites se pueden fijar, conocida la estructura de $\mathscr{D}$. La sola consideración de la coherencia es, pues, insuficiente para determinar de modo efectivo el grado de confirmación de una hipótesis. Son necesarios principios nuevos, como se ha dicho ya. Pero antes de estudiar los sistemas de lógica inductiva fundados sobre el concepto metalógico de probabilidad, procede preguntarse si la adición a los axiomas de probabilidad de algunas hipótesis muy débiles y fácilmente justificables no bastaría para establecer algunos resultados importantes en una

teoría de la inducción. De este orden serían los teoremas de la confirmación, cuyo alcance limitado hemos hecho observar ya. Nos es necesario emprender ahora su estudio.

CAPITULO X

LOS TEOREMAS DE LA CONFIRMACION

La teoría metalógica de la probabilidad se ha constituido en el intento de justificar los procedimientos inductivos. Por eso se la ha utilizado para este fin antes de que haya alcanzado un rigor suficiente. Se trataba esencialmente de fundar una teoría de la inducción por confirmación, es decir, de establecer que la probabilidad de una ley se acrecienta sin límite cuando aumenta el número de sus consecuencias verificadas.

En efecto, hay dos creencias ampliamente extendidas: se admite que la verificación de una consecuencia de una ley acrecienta su probabilidad; se está dispuesto a admitir también que la multiplicación indefinida de las verificaciones hace que esa probabilidad tienda hacia la certeza. La enumeración simple no representaría sino un caso particular de inducción por confirmación: aquél en que la ley confirmada se expresa bajo la forma de una implicación universal entre predicados de observación. Pero sea cual sea la verosimilitud de esos principios, quedan, de todas formas, injustificados, lo que constituye uno de los escándalos de la teoría de la inducción, como hacía notar **Nicod**. Cierto que se puede tener al primero por intuitivamente evidente, pero en lo que atañe al segundo no ocurre lo mismo: esta actitud correría el riesgo de pasar por una confesión de fracaso. Más valdría demostrarlos a partir de principios que escaparan a toda contestación. Tal es el resultado que se espera de una teoría metalógica de la probabilidad.

Es preciso recordar que ese resultado no tiene, en la teoría de la inducción, la importancia que se está dispuesto a atribuirle algunas veces. Incluso el segundo de los enunciados a demostrar no basta a las necesidades del análisis epistemológico, dado que no permite ni calcular la probabilidad que un conjunto finito de verificaciones confiere a una ley, ni comparar entre sí las probabilidades de las diversas leyes. La convergencia hacia 1 no concierne sino a un caso ficticio. Sin embargo, ese resultado impacta a la imaginación, en la medida en que establece que, en circunstancias por otra parte ficticias, la inducción no le cede en nada a la deducción en cuanto a la certeza de las conclusiones que permite establecer. Por eso se han apasionado por demostrarlo y el pretendido éxito de **Keynes** en ese dominio ha ocasionado la gloria de este autor.

En esas condiciones, nos es imposible silenciar las demostraciones que se han propuesto de los teoremas de la confirmación. Este estudio es, además, instructivo,

por cuanto muestra la dificultad de una teoría lógica de la inducción. Lo que sorprende en la lectura de textos que pertenecen hoy a la prehistoria de la lógica inductiva, es la falta de rigor de las demostraciones, la penuria del aparato formal, la falta de certeza de los principios invocados, que convierte en delicadas la interpretación y la apreciación de los resultados. En esta materia, la insuficiente elaboración formal hace sentir funestos efectos.

Nuestro propósito es establecer en forma rigurosa los resultados esenciales de una teoría de la confirmación, poniendo al descubierto las hipótesis necesarias para su demostración. Saliendo, pues, del marco de los problemas formales, intentaremos ver si existen principios que garanticen la verdad de esas hipótesis. Es entonces cuando nos veremos llevados a interrogarnos sobre la validez, la inteligibilidad y la eficacia de los principios que han propuesto **Keynes** y otros autores diversos para fundar una teoría de la confirmación.

1. Los teoremas de la confirmación: las condiciones de su demostración

Sea $\mathscr{S}$ un sistema semántico, $\mathscr{A}$ un conjunto de fórmulas de $\mathscr{S}$ cerrado para los conectores proposicionales. Sea h una fórmula de $\mathscr{A}$ que llamaremos la hipótesis. Designaremos por e una fórmula que expresa todo lo que se conoce como verdadero por experiencia, anteriormente a la verificación de una consecuencia de h. Circunstancialmente, e será una fórmula lógicamente verdadera (si no se sabe nada por experiencia). q es una consecuencia de h si q se deduce de h, o más exactamente, si q se deduce de h y de lo que se conoce como verdadero, es decir, si "$h, e \vdash q$". En ciertos casos, tendremos que considerar una serie infinita de consecuencias de h: q_1, q_2, q_3 ... Supondremos que cada una de esas consecuencias es "nueva" con respecto a las precedentes, es decir, que no se deduce de e y de su conjunción. Designemos por q'_n la conjunción $\bigwedge_{i=1}^{n} q_i$.[1] A la serie de las consecuencias se le impondrá la siguiente condición: Para todo n (con $n > 0$), no se tiene: $e, q'_n \vdash q_{n+1}$ mientras que se tiene $h, e, q'_n \vdash q_{n+1}$. En la situación aquí descrita, se llama $c(h, e)$ a la probabilidad antecedente de la ley h. Está claro que los conceptos que acabamos de definir sólo tienen sentido si h tiene una forma determinada que corresponde, además, a la forma sintáctica requerida para que una fórmula exprese una ley general[2].

Supongamos que $\mathscr{A}$ está probabilizada. Sea cual sea la probabilidad tomada en consideración, dado que $c(h, e) \neq 0$, se tiene, a partir del teorema de multiplicación:

$$c(h \,\&\, q, e) = c(h, e) \cdot c(q, h \,\&\, e)$$
$$= c(q, e) \cdot c(h, q \,\&\, e)$$

[1] Si $n = 0$, q'_n designa naturalmente una fórmula lógicamente verdadera.

[2] Hay que suponer incluso que es posible construir una infinidad de especificaciones de h, es decir, el lenguaje considerado contiene una infinidad de constantes individuales.

Pero como de $h, e \vdash q$, se deduce $c(q, h \,\&\, e) = 1$, se concluye de ahí:

$$c(h, q \,\&\, e) = \frac{c(h, e)}{c(q, e)}$$

y por tanto: $$c(h, q \,\&\, e) \geqslant c(h, e) \qquad (1)$$

El resultado que expresa la fórmula (1) muestra que la probabilidad de una ley no decrece cuando se verifica una de sus consecuencias. Para que crezca, dicho de otra manera, para que la desigualdad sea estricta en (1), basta con que $c(q, e) \neq 1$.

Pero se puede establecer, en las mismas circunstancias, otro resultado dejado en la oscuridad muy a menudo, aun cuando diversos autores, entre ellos D. **Wrinch**, H. **Jeffreys**[3] y R. **Poirier**[4] lo hayan enunciado explícitamente. Se supone siempre $c(h, e) \neq 0$. El teorema de multiplicación permite escribir:

$$c(h \,\&\, q'_n, e) = c(h, e) \prod_{i=1}^{n} c(q_i, h \,\&\, q'_{i-1} \,\&\, e)$$

$$= c(h, e \,\&\, q'_n) \prod_{i=1}^{n} c(q_i, q'_{i-1} \,\&\, e)$$

Como se tiene, para todo i, $c(q_i, h \,\&\, q'_{i-1} \,\&\, e) = 1$; se sigue que:

$$c(h, e \,\&\, q'_n) = \frac{c(h, e)}{\prod_{i=1}^{n} c(q_i, q'_{i-1} \,\&\, e)}$$

Debiendo ser la expresión del segundo miembro inferior a 1, se deduce de ello:

$$\prod_{i=1}^{n} c(q_i, q'_{i-1} \,\&\, e) \geqslant c(h, e)$$

y por tanto: $$\lim_{n \to \infty} c(q_n, q'_{n-1} \,\&\, c) = 1 \qquad (2)$$

Así, cuando crece indefinidamente el número de consecuencias verificadas de la ley h, la probabilidad de una consecuencia nueva tiende hacia 1.

El tercer teorema, debido a **Keynes**[5], y al que reservamos el nombre de teorema *principal* de la confirmación, intenta probar que, en las mismas circunstancias, la probabilidad de la ley (y no de una de sus nuevas consecuencias) tiende hacia 1. Su demostración, como vamos a ver, exige una hipótesis más fuerte que la finitud de $c(h, e)$.

---

3 Cf. *C.F.P.* y **Jeffreys** (H.), *T.P.*, cap. 1, § 1-62, y *S.I.*, cap. 2, § 2-5.
4 Cf. *R.P.I.*, cap. 1, p. 31.
5 *T.P.*, cap. 20, § 3, pp. 235-236.

Tenemos, por una parte, con las mismas notaciones que antes:

$$c(q'_n, e) = c(q'_n \,\&\, h, e) + c(q'_n \,\&\sim h, e).$$

Pero, dado que $e, h \vdash q'_n$: $c(q'_n \,\&\, h, e) = c(h, e)$ y $c(q'_n, h \,\&\, e) = 1$.

Escribiendo por otra parte el teorema de multiplicación, se concluye:

$$c(h, q'_n \,\&\, e) \cdot c(q'_n, e) = c(q'_n, h \,\&\, e) \cdot c(h, e).$$

o: $c(h, q'_n \,\&\, e)[c(h, e) + c(q'_n \,\&\sim h, e)] = c(h, e)$.

Se tiene, pues:

$$c(h, q'_n \,\&\, e) = \frac{c(h, e)}{c(h, e) + c(q'_n \,\&\sim h, e)}$$

Lo que se escribe también:

$$c(h, q'_n \,\&\, e) = \frac{c(h, e)}{c(h, e) + c(q'_n, e \,\&\sim h)[1 - c(h, e)]} \tag{3}$$

Si se excluye el caso en que se tenga ya $c(h, e) = 1$, que no plantea, naturalmente, ningún problema, es obvio que la condición necesaria y suficiente de que $c(h, q'_n \,\&\, e)$ tienda hacia 1 cuando n crezca hasta el infinito es que $c(q'_n, e \,\&\sim h)$ tienda hacia 0 en las mismas circunstancias, siendo $c(h, e)$ no nulo. En otros términos, la multiplicación de las verificaciones de una ley cuya probabilidad antecedente es no nula le dará una probabilidad que tiende hacia la certeza, si la falsedad de esta ley implica que la verificación de una infinidad de consecuencias de esta ley tiene una probabilidad nula. El cumplimiento de esta condición nueva, de apariencia natural, sin embargo, es el que planteará problemas.

Los resultados precedentes son justamente aquéllos cuya demostración es esencial en una teoría de la confirmación. El problema es ahora saber en qué condiciones se puede estar seguro de la verdad de las hipótesis necesarias para su demostración. Lo mejor es limitarse al caso en que e designa una fórmula lógicamente verdadera que simbolizaremos por t. El objetivo es determinar, entonces, dos partes de $\mathscr{A}$: $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$, tales que estemos seguros de tener:

1.° Si $h \in \mathscr{A}_1$, entonces $c(h, t) > 0$.

2.° Si $h \in \mathscr{A}_2$, entonces $c(h, t) > 0$, y si $(q'_n)_{n \in N}$ es una serie de consecuencias nuevas de h, se tiene:

$$\lim_{n \to \infty} c(q'_n \sim h) = 0$$

Es deseable, por supuesto, que $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$ sean tan amplias como sea posible. Los

dos primeros teoremas serán válidos para todas las fórmulas de $\mathscr{A}_1$; para las de $\mathscr{A}_2$, los tres.

Hasta ahora hemos dejado totalmente indeterminada la estructura de $\mathscr{S}$ y los límites de $\mathscr{A}$. Es claro que, en esas condiciones, se tienen pocas posibilidades de descubrir principios fundados en razón y que permitan circunscribir $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$ de modo efectivo. Sin embargo, en lo que concierne al primero de estos conjuntos, se impone una observación. No podría tener una potencia superior al enumerable[6], lo que no es apenas una restricción, en tanto que se respeten las condiciones de efectividad. En cambio, suponiendo que decidamos ceñirnos a funciones de confirmación estrictamente coherentes, tenemos la certeza de que $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1$. Resultado importante, pues estamos dispuestos a admitir que el principio del "learning from experiment" debe ser satisfecho por todo grado de confirmación adecuado, y hemos contado este principio entre el número de los requisitos intuitivos impuestos a toda probabilidad inductiva. Ahora bien, vemos que esta condición equivale a la coherencia *estricta,* que basta, por otra parte, para establecer también el segundo teorema.

Por otra parte, la observación que acabamos de hacer, con respecto a la limitación al enumerable, tiene por resultado eliminar el aspecto paradójico de ese segundo teorema. En efecto, establecemos que la multiplicación de las consecuencias verificadas de una ley hace que tienda hacia 1 la probabilidad de una verificación nueva. ¿No quiere decir esto que cualquier cosa prueba cualquier cosa? Sean cuales sean los "hechos" que expresen las fórmulas de la serie $(q_n)_{n \in N}$, ¿no se puede acaso estimarlas siempre como consecuencias de una ley única bajo la cual se subsumirá igualmente cualquier otro hecho que no sea incompatible con ellos? A falta de algo mejor, se tomará como ley la conjunción de esos hechos. Así nos veríamos llevados a una interpretación del segundo teorema en la que se ha visto, con pleno derecho, una paradoja[7].

En realidad, una conclusión semejante no se impone en absoluto. Independientemente del hecho de que nos veríamos llevados a salir del marco de los sistemas efectivos al introducir conjunciones infinitas de fórmulas, hay que hacer notar que el teorema en cuestión sólo se demuestra si la ley tiene una probabilidad antecedente no nula. Ahora bien, no se puede dar simultáneamente una probabilidad no nula a todas las series infinitas de fórmulas. Pongamos un ejemplo tan simple como sea posible: $\mathscr{S}$ comprende un predicado monádico P, los conectores proposicionales, y una infinidad enumerable de constantes individuales: $a_1, a_2, a_3 \ldots$ El conjunto de las series de fórmulas del tipo $P(a_n)$ y $\sim P(a_n)$ y de las conjunciones de fórmulas de esas series tiene la potencia del continuo. Es pues imposible atribuir a cada una una probabilidad no nula. Esto excluye que el teorema en cuestión vuelva a establecer que cualquier cosa prueba cualquier cosa. Desde el momento en que las exigencias de la formalización se respetan estrictamente, a saber, desde que se predetermina un

---

6 Ocurre lo mismo con el segundo, ya que se tiene $\mathscr{A}_2 \subset \mathscr{A}_1$.

7 Cf. **Poirier** (R.), *R.P.I.*, cap. 1, p. 32.

conjunto de fórmulas a las que se atribuye una probabilidad antecedente no nula, la paradoja se desvanece.

Hemos acabado así el estudio estrictamente formal de los teoremas de la confirmación. Nos es necesario buscar ahora los principios que podrían justificar circunstancialmente las hipótesis necesarias para su demostración.

2. La teoría keynesiana: examen crítico

Keynes, quien demostró el primero el teorema principal de la confirmación, ha propuesto un principio que asegura que se satisfacen las condiciones necesarias para su demostración.

En realidad, en la obra de **Keynes** se encuentran dos enunciados distintos de ese principio: uno muy amplio, el otro mucho más restrictivo. El primero concierne a "los sistemas de hechos o de proposiciones"[8]. **Keynes** hace notar que, dado un conjunto de proposiciones, es posible que existan entre esas proposiciones "vínculos de conexión necesaria" que permitan deducir algunas de ellas de las otras. Llama sistema de variedad finita a los que son tales que todas las proposiciones que pertenecen a ellos se deducen de un conjunto finito. Si se admite que los "sistemas" de proposiciones tomados en consideración por **Keynes** son los sistemas deductivos, o sistemas cerrados con respecto a la consecuencia en el sentido de **Tarski**, se puede decir que coinciden la noción keynesiana de sistema de variedad finita y el concepto de sistema axiomatizable que introducirá ulteriormente **Tarski**[9]. Parece entonces que **Keynes** se orienta hacia una enunciación del principio de variedad limitada que podría ser la siguiente: "Todo conjunto de proposiciones que pertenece al conocimiento experimental es axiomatizable."

Ahora bien, de manera extraña, **Keynes** abandona esta vía, que podía conducirle a una definición general del concepto de variedad limitada; no se toma siquiera la molestia de enunciar el principio de variedad limitada en su forma general, y anuncia que va a "abordar la cuestión desde un punto de vista ligeramente diferente"[10]. De hecho, se ciñe inmediatamente al caso en que las proposiciones se expresan en un lenguaje determinado, que es un lenguaje funcional de primer orden que no contiene sino predicados monádicos. La semántica de ese lenguaje (que permanece implícita) vuelve a interpretar las constantes individuales como nombres de objetos percibidos y los predicados como nombres de propiedades de esos objetos. **Keynes** define rigurosamente la noción de variedad limitada sólo para los sistemas de proposiciones de ese lenguaje, muy especialmente para aquéllos compuestos de implicaciones y equivalencias universales.

---

[8] *T.P.*, cap. 22, § 1, p. 251.

[9] Cf. **Tarski** (A.), *Fundamental concepts of the methodology of deductive sciences*, en *L.S.M.*, pp. 60 a 109.

[10] *T.P.*, cap. 22, § 1, p. 252.

¿Por qué esta limitación a un caso tan particular y restrictivo? ¿Adquiere una mayor certeza el principio de variedad limitada cuando se lo restringe de este modo? No lo parece y se tiene derecho a pensar que **Keynes** se ha dejado dominar por la teoría tradicional de la inducción en la que únicamente se toman en consideración leyes de este tipo y donde la inducción por confirmación se reduce de hecho a la enumeración simple. En todo caso, **Keynes** no ha desarrollado su teoría excepto en ese caso particular y ha intentado llevar el debate hacia ese terreno. De entrada, debemos hacer notar, pues, que aun cuando fundara la inducción por confirmación, el campo de aplicación de su doctrina es demasiado restringido para que se la tenga por plenamente satisfactoria.

El enunciado del principio de variedad limitada va precedido por la introducción de un principio, denominado principio de la uniformidad de la naturaleza, cuyo papel exacto no ha sido siempre reconocido y del que vamos a hablar en primer lugar. Este principio afirma que los caracteres que atañen a la simple localización espacio-temporal de un objeto no pueden determinar la posesión de una propiedad por parte de ese objeto. En otros términos, si hay leyes que conectan las propiedades de observación, son válidas para todos los puntos del tiempo y del espacio. La localización espacio-temporal no podría ser *causa.* Es posible interrogarse acerca del fundamento de este principio; **Keynes**, que lo denomina algunas veces principio de "la irrelevancia de la posición espacio-temporal", dice que "se presenta como tan fuerte y tan cierto, aun cuando sea difícil ver cómo puede ser fundado sobre la experiencia, que el juicio por el que llegamos a él parece ser quizás inmediato"[11]. Observemos simplemente que una teoría idealista del tiempo y del espacio lo pone fuera de discusión y que juega un papel esencial en la constitución de la ciencia dado que, por ejemplo, la teoría de la relatividad se funda en él.

Pero el problema no es tanto saber qué es lo que da certeza a este principio como determinar el papel exacto que juega en la teoría de la confirmación. Cuando se trata de demostrar los teoremas de la confirmación, no se lo ve aparecer por ninguna parte, al contrario del principio de variedad limitada. Es que su función es distinta: autoriza que se haga abstracción de la localización en la descripción de la naturaleza. En suma, prueba que no es ilegítimo buscar leyes que se expresen en un lenguaje del tipo que hemos descrito, ni restringir el conocimiento relevante en la asignación de una probabilidad a aquél que encuentre allí una expresión. Justifica la restricción del lenguaje o, más exactamente, evita una objeción que podría hacérsele, pero no juega ningún papel en las demostraciones conseguidas respecto a las fórmulas de ese lenguaje. La exposición de **Keynes**, bastante confusa en ese punto, ha disimulado ese hecho esencial.

Admitida la legitimidad de la elección de un lenguaje en el que no aparecen sino nombre de objetos o de propiedades de objetos de la percepción, falta por probar de modo efectivo que los teoremas de la confirmación se aplican a algunas de sus fór-

[11] *T.P.*, cap. 22, § 5, pp. 255-256.

mulas. Así es como interviene el principio de variedad limitada en su forma restringida: "Las propiedades observables (apparent) de todo objeto dado, casi innumerables, nacen todas ellas de un número finito de propiedades generatrices, que podemos llamar Φ_1, Φ_2, Φ_3, ..." Algunas nacen de Φ_1 únicamente, otras de Φ_1 conjuntamente con Φ_2, y así sucesivamente. Las propiedades que nacen de Φ_1 sólo forman un grupo; las que nacen de Φ_1, Φ_2 en conjunción, otro grupo, y así sucesivamente. Dado que el número de las propiedades generatrices es finito, también lo es el número de grupos. Si un conjunto de propiedades observables nace, digamos, de las tres propiedades generatrices Φ_1, Φ_2, Φ_3, entonces este conjunto de propiedades puede ser especificado por el grupo Φ_1, Φ_2, Φ_3[12].

Se ve a qué dificultad debe aportar una solución el principio de variedad limitada; el número de las propiedades de observación es muy grande, si no infinito (**Keynes** da marcha atrás ante esta hipótesis). Es posible que así nos veamos llevados a introducir, en el lenguaje que sirve para expresar los resultados de la observación, una infinidad de predicados, P_1, P_2, ... ¿Cómo haremos para que todas las leyes del tipo $(x)(P_ix \supset P_jx)$ tengan una probabilidad no nula? Suponiendo que hay un conjunto finito de propiedades generatrices, de las que **Keynes** no asegura que sean propiedades de observación[13], se podría resolver este problema. Cada propiedad se define por un conjunto φ' de generadores que es un subconjunto de φ[14]. Entonces, si dos propiedades, P_i y P_j, pertenecen respectivamente a grupos φ_i y φ_j tales que $\varphi_j \subset \varphi_i$, entonces la ley $(x)(P_ix \supset P_jx)$ será verdadera. Ahora bien, si n es el número de subconjuntos del conjunto de los generadores, habrá una probabilidad $1/n$ de que dos propiedades pertenezcan al mismo grupo y una probabilidad más fuerte de que $\varphi_j \subset \varphi_i$. Así, toda ley no contradictoria lógicamente tendría esa probabilidad finita necesaria para la demostración de los teoremas de la confirmación y suficiente para la prueba de los dos primeros de ellos.

Falta por saber si este principio basta para establecer la segunda condición necesaria para la demostración del teorema principal. **Keynes** responde afirmativamente a esta pregunta: prueba que se satisface una condición que entraña la que está en cuestión, y de la que **Nicod** ha mostrado claramente que era más fuerte[15]. Del principio de variedad limitada se podría concluir que la invalidación de una consecuencia nueva de una ley conserva una probabilidad finita, si se supone la ley

[12] *T.P.*, cap. 22, § 3, pp. 253-254.

[13] Además, es preciso suponer, en realidad, ya sea que son observables, ya sea que se ignora cuáles son las propiedades generatrices entre las propiedades observables, sin lo cual ciertos razonamientos están desprovisto de significación.

[14] **Keynes** parece suponer que una propiedad está especificada por un grupo único de generadores y, naturalmente, por todos los grupos que contienen ese grupo. Se podría concluir fácilmente en condiciones menos restrictivas. En este dominio, el uso del lenguaje de las álgebras de **Boole** permitiría clarificar la situación del mismo modo que permite simplificar el tratamiento del problema de **Mill**. Nos abstendremos de efectuar las transcripciones necesarias, que prolongarían la exposición sin tocar el fondo de la cuestión.

[15] *P.L.I.*, p. 74.

falsa, y esto sea cual sea el número de las consecuencias ya verificadas. En otros términos, sea cual sea n, existe ϵ tal que $c(\sim q_n, \sim h \,\&\, e \,\&\, q'_n - 1) > \epsilon$. De ahí se deduce fácilmente que $\lim_{n \to \infty} (q'_n, e \,\&\, \sim h) = 0$. El razonamiento mediante el cual **Keynes** intenta mostrar que hay ahí una consecuencia del principio de variedad limitada es enteramente sibilino[16]. Parece que la argumentación es la siguiente: si la ley $(x)(Px \supset Qx)$ es falsa, existe al menos un conjunto de generadores que determina un grupo de propiedades al que pertenece P sin que pertenezca Q. Como hay un número finito de conjuntos de generadores, hay una probabilidad finita de que un objeto tomado al azar posea ese conjunto de propiedades generatrices y por tanto invalide la ley. Tal es, al menos, la interpretación del razonamiento de **Keynes** que propone[17] **Nicod** y que nos parece la única inteligible.

El principio de variedad limitada justificaría, pues, la inducción por confirmación. Pero falta por saber si ese principio puede admitirse y qué es lo que justifica la confianza que estamos dispuestos a otorgarle. Por otra parte, **Keynes** no exige en absoluto que sea cierto: bastaría con otorgarle una probabilidad finita. La probabilidad antecedente de una ley se obtendría entonces por aplicación del teorema de multiplicación, multiplicando la probabilidad del principio de variedad limitada por la probabilidad que él confiere a esta ley. Ella seguiría siendo finita. Este procedimiento es, por lo menos, sospechoso, ya que compone enunciados de los cuales unos pertenecen a la lengua mientras que el otro –el principio de variedad limitada– depende de la metalengua[18]. Lo son todavía más los razonamientos por los cuales **Keynes**, retomando la tradición de **Mill**, pretende que el éxito de la inducción por confirmación acrecienta la probabilidad del principio sobre el que se apoya[19]. Pero, además, **Keynes** tiene a este principio por un auténtico principio sintético *a priori*, en un sentido próximo al que **Kant** otorga a este término[20]. Nos vemos forzados a reconocer que el pensamiento de **Keynes** acerca de este problema permanece sin elaborar[21].

---

[16] Cf. *T.P.*, cap. 22, p. 254.

[17] *P.L.I.*, p. 76.

[18] En rigor, **Keynes** multiplica una probabilidad definida por una cierta métrica por la probabilidad de esta métrica.

[19] *T.P.*, cap. 22, § 11, p. 260.

[20] *T.P.*, cap. 22, § 13, p. 263. **Keynes** justifica el principio de variedad limitada introduciendo un paralelo entre este principio y el principio de uniformidad de la naturaleza, y lo que dice a propósito de este último principio muestra que no se niega a estimarlo como un principio sintético *a priori*.

[21] Del mismo modo, **Keynes** se enreda en seudo-dificultades. Ha supuesto implícitamente que una propiedad está determinada por un grupo único de generadores. ¿Puede admitirse que ocurra así? En otros términos, ¿toda propiedad tiene únicamente una causa? **Keynes** vacila en zanjar netamente el debate. De hecho, propone dos respuestas diferentes. Por una parte afirma que se requiere simplemente que la unicidad de la causa tenga una probabilidad finita. Se podría componer entonces esta probabilidad con la que ella confiere a una ley. (*T.P.*, cap. 22, § 7, p. 257); por otra parte, hace notar que la hipótesis de la unicidad de la causa es inútil, pues "la misma pluralidad de las causas debe ser finita" (*T.P.*, cap. 22, § 9; p. 258.) Hemos visto la fragi-

Desde que esta doctrina se propuso al público, tropezó con vivas críticas que, sin embargo, no recayeron sobre aspectos esenciales, sino muy a menudo sobre puntos anexos. Así ocurre con los célebres textos en que **Nicod** intenta establecer que la teoría de **Keynes** prueba, contra su autor, que la inducción por confirmación no tiene al determinismo por premisa ni a la eliminación como resorte. Si el razonamiento de **Nicod** sobre el primer punto resulta muy sumario[22], sobre el segundo es irrefutable. Es exacto que un "ejemplo idéntico a un ejemplo precedente"[23] ya verificado acrecienta la probabilidad de una ley incluso si es completamente conocido. Y sin embargo, en ese caso, el segundo ejemplo no puede servir para eliminar ninguna ley que no haya sido eliminada en el caso precedente. Por otra parte, se ha podido mostrar que **Keynes** se equivocaba al pretender que su principio era confirmado por la experiencia[24], que debió tomar partido claramente y hacer de él un auténtico principio sintético *a priori*.

Tales argumentos no carecen de fundamento. Invitan a profundizar, completar y reformar la filosofía keynesiana de la inducción. Pero no ponen en cuestión un resultado esencial: **Keynes** puede enorgullecerse de haber descubierto el principio de la inducción, buscado en vano en tanto que no se disponía del instrumento probabilitario. El principio de variedad limitada funda la inducción por confirmación. Antes de preguntarse qué es lo que garantiza su certeza, o de buscar la significación

---

lidad de las soluciones del tipo de la primera en la que se componen probabilidades que no tienen nada en común. Está claro que la segunda solución es la aceptable: basta con que Q pertenezca a *todo* grupo de propiedades determinado por un conjunto definido de generadores al que pertenece igualmente P para que la ley $(x)(Px \supset Qx)$ sea verdadera. Ahora bien, los razonamientos de **Keynes** permiten concluir fácilmente que una contingencia tal tiene una probabilidad finita. La vacilación con respecto a esto manifiesta la complejidad de los razonamientos de **Keynes** que linda a menudo con la confusión.

[22] Por determinismo de una propiedad A, entiende **Nicod**, como **Keynes** por otra parte, el hecho de que se pueda asignar un conjunto finito de propiedades $(B_i)_{i \in I}$ tal que al menos una de las leyes $(x)(B_i x \supset Ax)$ sea verdadera. El determinismo no sería una premisa de la inducción, se nos dice, dado que la confirmación puede dar a una ley una probabilidad superior a la de su determinismo. En efecto, supongamos $(B_i)_{i \in I}$ reducido a un elemento; la probabilidad del determinismo es la probabilidad antecedente de la ley y se sabe que esta probabilidad se acrecienta por la confirmación (*P.L.I.*, pp. 67-68). Este razonamiento de **Nicod** es poco convincente, pues de todas formas ocurre que la probabilidad de una ley seguiría siendo nula si su probabilidad antecedente, identificada aquí con la probabilidad del determinismo, lo fuera.

[23] Procede hacer notar que la noción de ejemplos idénticos es ambigua. Está claro que la repetición de una misma fórmula no puede cambiar la probabilidad de una ley y que se tiene $c(h, e) = c(h, e \,\&\, e)$. En esas condiciones, R. **Poirier** tiene derecho a asombrarse de que se atribuya a la simple repetición de una misma proposición la virtud de acrecentar la probabilidad de una ley (*R.P.I.*, cap. 1, p. 30). Pero por "ejemplos idénticos" se puede entender una cosa muy distinta: se tratará de proposiciones que atribuyen las *mismas* propiedades a individuos distintos, tales como "Pa" y "Pb". Ejemplos idénticos en este sentido corresponden a segundos argumentos distintos en las probabilidades y nada impide que un ejemplo idéntico a un ejemplo precedente acreciente la probabilidad de una ley. Naturalmente, la existencia de ejemplos idénticos en ese sentido plantea problemas y se puede ver en ello una infracción del principio de los indiscernibles.

[24] Cf. **Kneale** (W.): *P.I.*, § 39, p. 211.

de una teoría de la inducción que no concede sino un lugar secundario a la eliminación, conviene examinar con cuidado otro problema: ¿garantiza de modo efectivo, el principio de variedad limitada, que se cumplen las condiciones necesarias para la demostración de los teoremas de la confirmación? El orden de las razones exige que se comience por el examen de esta cuestión.

Es inútil volver sobre un hecho que hemos señalado, a saber, el carácter restrictivo de la teoría keynesiana que no puede ser presentada sin abuso como una teoría general de la confirmación. En realidad, en el marco limitado que le es propio, ¿es válida la demostración propuesta? Ha sido contestada bajo pretexto de que la finitud del número de los generadores no bastaría para concluir en el caso del teorema principal. Sería preciso asignar una cota a ese número. El argumento se encuentra a la vez en pluma de **Nicod**[25] y de **Russell**[26]. Vendría a cuento si **Keynes** se propusiera determinar efectivamente la probabilidad *a priori* de una ley. Pero su intención no es tal: le basta con asegurarse de que es finita, sin que trate de caracterizarla mejor. Acotar el número de los generadores no es necesario en absoluto: pueden lograrse los mismos resultados con la sola hipótesis de su finitud[27].

Pero, en realidad, ¿es concluyente el razonamiento de **Keynes**? Se puede ya dudar de ello cuando se toma en consideración la demostración de la primera hipótesis: sea n el número de grupos de propiedades determinadas por los diversos conjuntos de generadores. La probabilidad de que 2 propiedades pertenezcan al mismo grupo es $1/n$. Está claro que, en un caso semejante, se hace uso del principio de indiferencia. En ausencia de razón contraria, se supone que son iguales las probabilidades de que una propiedad pertenezca a los diferentes grupos. Este argumento es sospechoso en sí mismo. Lo es todavía más el razonamiento mediante el que **Keynes** se propone fundamentar la segunda hipótesis. Se trata de establecer que la probabilidad de que una ley falsa sea invalidada en una prueba cuando ha sido confirmada anteriormente n veces sigue siendo finita, sea cual sea n. La falsedad de la ley implica la propiedad antecedente y no la consecuente. De la finitud del conjunto de los generadores, concluye **Keynes** que hay una probabilidad finita de que un objeto tomado al azar pertenezca a ese grupo. El principio de indiferencia es pues aplicado de nuevo, pero de manera diferente: sirve para calcular la probabilidad de que las propiedades de un objeto cualquiera sean las engendradas por un conjunto determinado de generadores. Hasta aquí el principio de indiferencia daba la probabilidad de que una propiedad P sea engendrada por una familia determinada de generadores. Ahora sirve para calcular la probabilidad de que las propiedades de un objeto a sean todas aquéllas engendradas por una familia determinada.

---

[25] *P.L.I.*, p. 75.

[26] *H.K.*, p. 6, cap. 3, p. 459.

[27] **Nicod** razona así: en la ignorancia del número de generadores, la probabilidad de que ese número sea n debe distribuirse igualmente entre todos los números; así pues la probabilidad de que el número de los generadores sea inferior a un número dado de antemano es nula. Argumento inaceptable. No se razona en absoluto suponiendo que hay una probabilidad determinada de que el número de generadores sea n, sino suponiendo simplemente su finitud.

Estos dos argumentos son discutibles. Se puede dudar de que sean consistentes. Es cierto que el segundo es inaceptable. **Nicod** objeta oportunamente que "lo que se da como finito no es *el número de los ejemplos individuales,* sino sólo el número de los *ejemplos no idénticos o distintos,* que se puede llamar *el número de las especies*". Añade que **Keynes** supone implícitamente que "la frecuencia de las diversas especies no modifica la probabilidad de que un individuo pertenezca a una especie determinada", olvidando "que no se obtiene directamente en cada observación una especie, sino un individuo"[28]. En suma, el razonamiento descansaría sobre una confusión burda y, si lo siguiéramos, nos veríamos forzados a admitir que la observación no puede enseñarnos nada acerca de la probabilidad de que un individuo pertenezca a una especie determinada. Consecuencia absurda, que no se puede aceptar: La segunda condición no es, pues, en modo alguno, una consecuencia del principio de variedad limitada.

Inútilmente restringida a un caso particular muy limitado, inútilmente compleja, la teoría keynesiana de la confirmación es, por tanto, insuficiente. **Keynes** no ha determinado de ningún modo los principios que asegurarían que se satisfacen las condiciones de la demostración del teorema principal. Con dificultad, puede prevalecer la demostración de los dos primeros teoremas, que no se obtiene sino en condiciones muy restrictivas y mediante un argumento dudoso. Su doctrina constituye una etapa históricamente importante en el estudio de los problemas de la inducción; no les aporta una solución satisfactoria. Sin embargo, no se excluye que, retomando los pasos de **Keynes**, conservando ciertos principios sobre los cuales él ha construido, pero enunciándolos bajo una forma nueva, se llegue a una teoría a la vez más satisfactoria, menos compleja y de aplicación más extensa. Por eso nos es necesario examinar las principales tentativas que se han hecho para fundar una teoría de la confirmación.

3. Los principios de una teoría de la confirmación

Retomemos el problema tal como se planteaba al comienzo del parágrafo precedente. Habían sido demostrados tres teoremas. Los dos primeros suponían el cumplimiento de una sola condición; el tercero reclamaba la verdad de una segunda hipótesis. Esos teoremas concernían a las fórmulas de un sistema semántico cuya naturaleza quedaba indeterminada. Se trataba, habíamos dicho, de encontrar y de justificar principios que prueben que esas condiciones se satisfacen por conjuntos de fórmulas bastante extensos.

Para que todas las leyes de una familia completa tengan una probabilidad no nula, es necesario que el cardinal de esta familia no sobrepase el enumerable. Si es finita, la asignación de probabilidades no nulas no plantea ningún problema. Si es enumerable, es preciso determinar un orden de enumeración. **Jeffreys** es el primero

[28] *P.L.I.*, pp. 76-78.

en haber tenido la idea de construir una teoría de la confirmación que se aplica a este último caso y utiliza el concepto de simplicidad[29]. Su doctrina se refiere a leyes de un tipo radicalmente diferente de aquéllas a las que se aplica la teoría keynesiana. Se trata de leyes que se expresan bajo la forma de relaciones funcionales que enlazan un número finito de magnitudes físicas. Se supone que existe una relación funcional entre ciertas magnitudes. El conjunto de las relaciones posibles constituye una familia completa de hipótesis. Suponiendo que se sepa limitarla a un conjunto enumerable y determinar un orden de enumeración, no estaría prohibido asignar una probabilidad finita a cada una de esas relaciones. Quizás se podría ir más lejos y encontrar principios que justifiquen que se proceda efectivamente a esta asignación.

Pero las magnitudes físicas son corrientemente variables con valores reales y el conjunto de las aplicaciones de R^n en R con valor constante[30] (o de las aplicaciones de un producto de intervalos de R en un intervalo de R) tiene una potencia superior al continuo[31]. Por eso parece imposible atribuir una probabilidad no nula a cada relación funcional. **Jeffreys** aporta a este problema una solución original y digna de interés. Si se consideran las necesidades de la física, es posible, dice, limitarse a las relaciones que se expresan bajo la forma de ecuaciones diferenciales de orden y de grado finito, con coeficientes enteros (o racionales, lo que viene a ser lo mismo). Por derivaciones sucesivas se puede poner bajo esta forma la mayor parte de las leyes físicas. Para devolverles su forma primitiva, será necesario determinar constantes de integración pero ése es sólo un problema secundario, fácilmente resuelto por el uso de las técnicas estadísticas de estimación de parámetros. Consideremos el conjunto de esas leyes: es enumerable. Para toda ecuación E, sea $N(E)$ la suma de su grado, de su orden y de los valores absolutos de sus coeficientes. Establezcamos $E_1 \leqslant E_2$ si $N(E_1) \leqslant N(E_2)$. Se ha definido así un pre-orden sobre el conjunto de esas ecuaciones y la relación $N(E_1) = N(E_2)$ es una relación de equivalencia que determina clases finitas. Así se introduce un orden de enumeración que es el de los valores crecientes de $N(E)$, tomándose en un orden cualquiera las ecuaciones con el mismo valor que $N(E)$, siempre en número finito.

Pero el orden introducido puede estimarse como un orden de complejidad creciente. En esas condiciones, parece bastante natural atribuir a las leyes una probabilidad decreciente cuando aumenta su complejidad. A la disyunción finita de las leyes correspondientes a un valor determinado de N, se le atribuirá una probabilidad P_N que se repartirá por igual entre ellas. Se hará de manera que P_N sea una función decreciente de N y que $\sum_{N-1}^{\infty} P_N$ converja hacia 1. La solución más elemen-

[29] Ver las referencias de la nota 3 de este capítulo.

[30] Es posible ceñirse a las funciones con valores constantes dado que una relación funcional puede escribirse siempre bajo la forma $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \text{Cste}$.

[31] Tiene la potencia Alef 2.

tal consiste en tomar $P_N = 2^{-(N-3)}$.[32] No sólo tendrá toda la ley una probabilidad no nula, sino que las más simples tendrán la probabilidad más fuerte.

La solución de **Jeffreys** tiene en sí ventajas indiscutibles: menos restrictiva que la de **Keynes**, parece más cercana a la práctica concreta de la ciencia, ya que las leyes a las que concierne son enlaces funcionales que juegan en ella un papel esencial y no esas implicaciones universales entre predicados de observación que sólo tienen una función extremadamente limitada. Además, se encuentra por primera vez que un principio que atribuye una probabilidad mayor a las leyes más simples juega un papel efectivo en una doctrina de la inducción.

¿Quiere decir esto que esta doctrina sea plenamente satisfactoria? No es posible afirmarlo. Su campo de aplicación, más extenso que el de la teoría de **Keynes**, sigue siendo todavía demasiado restringido. Es difícil sostener que todo conocimiento científico se expresa bajo la forma de enlaces funcionales entre magnitudes físicas. La búsqueda de esos enlaces no es posible, por otra parte, más que una vez definidas las magnitudes y sus procedimientos de medida y todo nuevo cuestionamiento de ese cuadro teórico está excluido de la trayectoria de **Jeffreys**. La limitación de esos enlaces a los que se expresan bajo la forma de ecuaciones diferenciales es también criticable. Por último, ¿se tiene derecho a estimar las leyes más simple como las más probables y a adoptar el criterio de simplicidad escogido por **Jeffreys**? Una respuesta afirmativa a la primera pregunta satisface el sentido común y se funda sobre un principio admitido corrientemente, aun cuando no se sabe cómo justificarlo. No ocurre lo mismo con el segundo problema: la elección de $N(E)$ como medida del grado de simplicidad es sólo una convención, convención natural, pero que no se impone de ningún modo. Además, **Jeffreys** la presenta como tal y compara la elección de un orden de enumeración con la elección de un sistema de unidades de medida: de creerlo, tanto en un caso como en otro, el problema puede ser regulado por una "conferencia internacional de hombres de ciencia". Declaración inquietante y que da lugar a pensar que la definición de un grado de simplicidad se reduce a la elección de un lenguaje cómodo. Si fuera así, sería preciso reconocer que la noción de simplicidad es puramente nominal, en modo alguno fundada sobre el orden de las cosas, y a la vez dejaría de verse qué es lo que justifica la atribución de una mayor probabilidad a lo que es más simple.

Pero, sobre todo, suponiendo que la demostración de **Jeffreys** sea aceptable, la primera hipótesis necesaria para la demostración del teorema de la confirmación es la única que ha sido probada. Falta la segunda. **Jeffreys** cree establecerla mediante el razonamiento siguiente: suponiendo que una ley sea falsa, es extremadamente improbable que una serie de medidas concuerde con las predicciones numéricas que ella permite establecer. Este enunciado no se demuestra en absoluto. Su verosimilitud se pone en duda cuando se constata que el juego de constantes de integración permite ajustar leyes distintas al mismo conjunto finito de observa-

[32] Es claro que N es al menos igual a 3.

ciones[33]. Lo menos que se puede decir es que la doctrina de **Jeffreys** no es plenamente satisfactoria en este punto. Por eso se tiene derecho a considerar que él no ha resuelto totalmente el problema de la confirmación, ni siquiera en el caso restringido que ha tomado en consideración.

La teoría de **Jeffreys** constituye un progreso indiscutible con respecto a la de **Keynes**. Se aproxima al resultado al que tiende una teoría de la confirmación, pero sin alcanzarlo. Es posible preguntarse si una trayectoria mucho más simple no conduciría al objetivo apuntado. Un retorno al principio de variedad limitada, considerado bajo su formulación general, ¿no abre acaso la vía a una solución? Ese principio afirma que todo sistema de proposiciones de la ciencia experimental es axiomatizable. Debemos preguntarnos qué significa ese principio, si puede admitirse y qué es lo que permite establecer.

Es claro que un enunciado semejante no atañe a las leyes científicas enunciadas de modo efectivo o propuestas a título de hipótesis. En el caso contrario, sería trivial, pues en todo momento de la historia del pensamiento, en razón de la finitud de la obra científica, su conjunto es, si no necesariamente finito, al menos deducible necesariamente de un conjunto finito de principios[34]. En cambio, no se podría exigir que signifique que todos los hechos son deducibles de un número finito de principios. Basta con que lo sean las leyes bajo las cuales pueden subsumirse los hechos. Su sentido es, por tanto, el siguiente: Sean cuales sean los hechos recogidos, es posible constituir una representación científica que dé cuenta de ellos subsumiéndolos bajo leyes deducidas de un número finito de principios. Concebido así, puede ser estimado como la expresión de una exigencia fundamental. Se tiene derecho a ver en él la expresión de una condición de inteligibilidad del universo, a erigirlo en principio trascendental y la duda con respecto a él no tiene apenas fundamento.

Pero, ¿sirve para probar las hipótesis necesarias para la demostración de los teoremas de la confirmación? En modo alguno. No es ni siquiera necesario suponer la finitud del número de los principios en el interior de un sistema científico determinado para asegurar que es posible asignarles una probabilidad no nula, pues esos principios no son hipótesis exclusivas. En cambio, habría que limitar el conjunto de las representaciones científicas que pueden concebirse (suponiendo que ese concepto tenga sentido). En efecto, esos sistemas se excluyen mutuamente. La limitación de su conjunto al enumerable es, por tanto, la condición necesaria para que sea posible atribuir a cada uno de ellos una probabilidad *a priori* finita. Pero el principio de variedad limitada, tomado en su forma general, no dice nada a propósito del número de teorías concebibles. No jugará pues ningún papel en la demostración de la primera hipótesis necesaria para probar los teoremas de la confirmación.

De todos modos, la segunda condición exigida para la prueba del teorema princi-

[33] Cf. *P.P.P.T.*

[34] En rigor, se podría admitir que fuera enumerable si ciertos principios experimentales se expresaran formalmente por esquemas de axiomas.

pal no podría establecerse por esta vía. Se ha propuesto fundarla sobre la finitud del número de los "individuos"[35]. En rigor, no se establecería sino mediante fórmulas de un tipo particular[36]. La finitud del número de las cualidades y el principio de los indiscernibles legitimaría esta hipótesis, si se acepta considerar que un objeto es únicamente un "complejo de cualidades". Aun cuando no sea radicalmente indefendible en el plano filosófico, esta solución es demasiado imprecisa, demasiado incierta y demasiado contraria a las creencias que la ciencia parece legitimar, para que se acepte apoyarse en ella.

Ha sido propuesto otro principio. Tiene la ventaja de la simplicidad y puede dar lugar a pensar que se ha buscado en trayectorias complejas una solución que era inmediata. Se trata del axioma de continuidad, enunciado por von **Wright**[37]. Este axioma es el siguiente: sea una serie de fórmulas tales que $\lim_{n \to \infty} h_n = h$. Suponiendo definidas las probabildades $c(h_n, e)$ se tendrá: $c(h, e) = \lim_{n \to \infty} c(h_n, e)$. Con las notaciones precedentes, se tendría $h = \lim_{n \to \infty} q'_n$; se seguiría de ahí que $\lim_{n \to \infty} c(q'_n, \sim h \,\&\, e) = c(h, \sim h \,\&\, e) = 0$. En realidad, esta solución no soporta un examen. Hagamos notar, en primer lugar, que la noción de límite aplicada a las fórmulas sólo tiene sentido una vez definida una topología[38] sobre su conjunto. Pero, sobre todo, el axioma propuesto por von **Wright** no asegura en modo alguno el resultado requerido. Identifica una ley con la serie infinita de sus consecuencias observables. Por ejemplo, una implicación universal será confundida con la conjunción infinita de todas sus especificaciones, o más bien, con el límite hacia el que tiende una conjunción de especificaciones tomadas en un orden determinado. Si la falsedad de la ley da una probabilidad nula a esta conjunción, no se sigue de ahí, en absoluto, que *toda* serie infinita de consecuencias tenga una probabilidad nula. Tal es, sin embargo, el enunciado que hay que justificar si se quiere demostrar el teorema principal[39]. El axioma de continuidad no brinda ninguna ayuda para alcanzar ese resultado.

El objeto de la teoría de la confirmación era limitado: únicamente se trataba de

---

[35] Cf. **Russell** (B.), *H.K.*, p. 6, cap. 3, p. 457. Hagamos notar que ese principio sólo se propone allí en forma dubitativa.

[36] Las que sólo contienen variables que se interpretan como nombres de objetos cualesquiera de la percepción.

[37] *L.P.I.*, cap. 6, § 5, pp. 121-122.

[38] Por supuesto, esta topología no será la corrientemente utilizada en lógica matemática y que asocia a un conjunto de fórmulas el conjunto de sus consecuencias, a título de clausura. Pero von **Wright** no dice de ningún modo cuál será: *L.P.I.* remite a un texto de *T.I.P.* donde se encuentra simplemente la definición matemática de límite, que presupone la definición de una topología.

[39] Sea por ejemplo un lenguaje de observación con un predicado monádico "*P*" y una infinidad de constantes individuales "a_1", "a_2", ... Hay que demostrar que la falsedad de la ley "$(x)Px$" implica que q'_n tiene una probabilidad que tiende hacia 0, si q'_n designa la conjunción "$Pa_2 \,\&\, Pa_4 \,\ldots\, \&\, Pa_{2n}$.

la demostración de ciertos teoremas acerca de los que hemos dicho que no podrían bastar para resolver los problemas de una epistemología de las ciencias experimentales. Pero, por modesta que sea esa ambición, de todas formas ha sido defraudada. Investigaciones complejas, a menudo conducidas con una cierta confusión y sin una plena consciencia de las exigencias del rigor formal, no han desembocado sino en resultados mediocres. Se puede establecer, en el plano formal, en qué condiciones se prueban los teoremas esenciales. Pero, incluso limitándose a casos restringidos, no es posible determinar principios generales y bien fundados que aseguren el cumplimiento de esas condiciones. En rigor, se puede garantizar la primera ciñéndose a funciones de confirmación coherentes, pero no se ha propuesto ningún principio aceptable que justifique la segunda. ¿Hay que poner en cuestión la habilidad de los lógicos que han tratado el problema? ¿Se debe suponer, por el contrario, que no hay ningún principio que justifique la inducción por confirmación? No se podría decidir entre esas dos hipótesis, aunque, a nuestro juicio, sea la segunda la más verosímil.

La teoría de la confirmación ofrece una ventaja inmediata: se presenta como un método directo que permite establecer ciertos resultados útiles en un análisis lógico de la inducción, logrando la economía de la determinación efectiva de un grado de confirmación. En realidad, no mantiene sus promesas: los problemas abordados revelan una complejidad insospechada. Parece que sea vano tratar de construir una teoría probabilitaria de la inducción antes de haber determinado explícitamente un grado de confirmación. En esas condiciones, los lógicos prefieren hoy otra aproximación a los problemas lógicos de la inducción, que consiste en determinar progresivamente una métrica probabilitaria para tipos de lenguaje escogidos entre los más simples.

CAPITULO XI

EL SISTEMA DE CARNAP

La definición de un grado de confirmación debía contribuir a la solución de los problemas epistemológicos que plantea la inferencia inductiva. Ahora bien, por limitados que hayan sido los objetivos que se habían asignado, los primeros autores que han trabajado en este sentido no han obtenido sino resultados cuya fragilidad hemos denunciado. Procede interrogarse sobre las razones de lo que es preciso llamar su fracaso si se quiere evitar caer en las mismas incertezas. De hecho, parece que es el deseo de alcanzar rápidamente resultados significativos, es decir, resultados que juegan un papel efectivo en una teoría epistemológica de la inducción, el que los ha extraviado. Así, se han visto llevados a olvidar los límites del formalismo, al mismo tiempo que descuidaban las exigencias de su constitución rigurosa.

Carnap es uno de los primeros en haber tomado conciencia de esta situación. Reprocha a sus antecesores –entre cuyo número cita especialmente a **Keynes** y a **Jeffreys**– "no haber otorgado una atención suficiente a la estructura del lenguaje". Esta negligencia es, a sus ojos, la causa de "ciertas dificultades e incluso contradicciones que resultan de algunos principios en sus formas habituales"[1]. Efectivamente, los autores de que hemos hablado no precisan la naturaleza del lenguaje sobre el que se define un grado de confirmación, cuando una función de ese tipo es siempre relativa a un lenguaje determinado; lo menos que se puede decir es que sus análisis concernientes al fundamento lógico de sus doctrinas son insuficientes. Dan la ilusión de crear un instrumento de alcance universal en tanto que no obtienen sino resultados ambiguos, inciertos e incluso contradictorios. Aleguemos como descargo que publicaban en un tiempo en que los conceptos fundamentales de una teoría de los sistemas formales no habían sido definidos con suficiente rigor.

Además, no distinguen netamente los problemas estrictamente formales de los que son de otra naturaleza. Pertenece a la lógica inductiva *stricto sensu* el único problema de la definición de un grado de confirmación sobre un lenguaje formalizado[2] y la demostración de sus propiedades. Todos los enunciados de esta disciplina son enunciados formales y las cuestiones a las que aportan una solución, cuestiones internas con respecto al lenguaje considerado. La lógica inductiva no nos ense-

[1] *L.F.P.*, § 14, p. 54.
[2] *L.F.P.*, § 44, pp. 202 y sig.

ñará que determinados conocimientos empíricos, relativos a un dominio particular de la ciencia, pueden encontrar una expresión formal en ese lenguaje; no justificará la elección de una función determinada como grado de confirmación. Supongamos que la aplicación de la lógica inductiva exige que se respeten ciertos principios; que sea preciso, por ejemplo, que ciertos términos del lenguaje (los predicados monádicos) designen propiedades cualitativas simples e independientes. La necesidad de este principio no puede ser objeto de una tesis de la lógica inductiva, que no nos enseñará tampoco si las condiciones que impone se satisfacen en una aplicación particular. **Carnap** bautiza con el nombre de *metodología de la inducción* a la disciplina de la que dependen todas las cuestiones que conciernen a la aplicación de la teoría formal de la confirmación.

De momento, poco nos importa saber si bajo la rúbrica "metodología de la inducción" no se colocan problemas heterogéneos, algunos propiamente metodológicos, concernientes a la aplicación y el uso de una disciplina formal; otros, que estarían mejor denominados como epistemológicos, relativos a la significación y a la justificación de los conceptos y de los principios sobre los que se apoya. Nos contentaremos con inscribir en el activo de **Carnap** su afán de aislar un núcleo de problemas estrictamente formales y la denuncia de su confusión con cuestiones de otra naturaleza. La ausencia de esta distinción explica un cierto número de errores que se han cometido. Es lo que atestiguan ciertos debates en torno al principio de la variedad limitada. Es claro que este principio, que vuelve a afirmar que las propiedades de observación constituyen un álgebra de base finita, no se enuncia en el lenguaje sobre el que se define un grado de confirmación. Concierne a la aptitud de un lenguaje de tipo determinado para formalizar el conocimiento empírico. Saber si se puede admitirlo, si el uso de tal tipo de lógica inductiva lo presupone, son cuestiones típicamente metodológicas. Que se haya pensado en determinar su grado de confirmación o que se haya propuesto multiplicar los grados de confirmación obtenidos suponiéndolo verdadero por su probabilidad propia, muestra que no se había reconocido su naturaleza y que se ignoraba su estatuto. Ahora bien, interesa tanto tratar las cuestiones formales con el rigor que exigen como distinguirlas de los problemas de otra naturaleza. Algunos autores han fracasado precisamente por no haber respetado esas exigencias.

Carnap evitará errores semejantes. Distingue con cuidado el núcleo de problemas estrictamente formales que pueden y deben tratarse aisladamente. ¿Quiere decir esto que el desarrollo de una lógica inductiva sea plenamente autónomo? No, pues los enunciados formales no reciben una significación epistemológica y no pueden utilizarse en una teoría del conocimiento inductivo en tanto que no se hayan resuelto ciertas cuestiones relativas a la aplicación de la teoría formal. Desde ese momento, las consideraciones metodológicas guían la elección de un grado de confirmación y permiten comprobar el valor del instrumento creado. En suma, la existencia de cuestiones metodológicas no es negada por **Carnap**; más bien, están siempre presentes en el horizonte de la investigación; pero no intervienen en el tratamiento de las cuestiones estrictamente formales.

Por otra parte, **Carnap** piensa que hay que renunciar a definir de entrada un grado de confirmación sobre un lenguaje lo bastante amplio como para permitir la expresión del conjunto del conocimiento científico. Si el conjunto de las fórmulas es demasiado extenso, las condiciones formales y los requisitos intuitivos que debe satisfacer un grado de confirmación son insuficientes para determinarlo. Su elección será arbitraria y se correrá el riesgo de ser inconsciente del despropósito circunstancial de las elecciones efectuadas. Más vale proceder por etapas: se definirá un grado de confirmación sobre tipos de lenguaje muy simples y se tratará de extender progresivamente esta definición, cuya validez se habrá podido comprobar, a lenguajes más amplios.

Este método tiene ventajas indiscutibles, incluso si su uso plantea problemas, como hemos dicho[3]. No se excluye que, en el caso de un lenguaje limitado, el margen de indeterminación en la elección del grado de confirmación sea muy escaso. Este hecho es tanto más probable cuanto que ciertos requisitos intuitivos, en particular todos los que atañen a las "condiciones de simetría", encuentran su expresión estricta cuando se los aplica a un lenguaje restringido. Además, se pretende que los enunciados formales de la lógica inductiva, cuyas condiciones de aplicación se habrán precisado eventualmente, coincidan con las prácticas inductivas admitidas corrientemente. Según la expresión de **Carnap**, la lógica inductiva debe ser una "reconstrucción racional de los métodos inductivos"[4]. La adecuación del formalismo constituido se comprobará muy fácilmente dado que sólo concierne a un lenguaje restringido. En suma, se tiene derecho a esperar que la consideración de casos aparentemente esquemáticos llevará a resultados no desdeñables.

La obra fundamental de **Carnap**: *Logical Foundations of Probability*, cuyas ideas esenciales habían sido esbozadas siete años antes de su publicación[5], brinda un ejemplo de aplicación del método que acabamos de exponer. Sobre un tipo de lenguaje particularmente limitado, llega **Carnap** a la definición explícita de un grado de confirmación. Cierto que los resultados obtenidos no carecen de defectos; algunos no satisfacen sino imperfectamente los requisitos que nuestra intuición nos lleva a imponer al grado de confirmación. Además, la metodología que debe adjuntarse a ese sistema impone condiciones draconianas, y por lo menos sorprendentes, a su aplicación. De todas formas, esta obra puede considerarse como un clásico en el dominio de investigación que nos ocupa. En primer lugar, aporta la prueba de que se puede construir un grado de confirmación satisfaciendo ciertas condiciones de adecuación y de que el sistema así constituido no padece ninguna contradicción interna. En contrapartida, muestra que ciertos requisitos intuitivos deberán ser abandonados[6]. Además se propone un método para construir el grado de confirmación. Este método será modificado, mejorado, pero, de todas formas, en lo que se

---

3 Cf. cap. IV, § 1.
4 Cf., especialmente, *I.L.*, § 16 y *L.F.P.*, § 110, pp. 576-577.
5 Cf. *I.L.*
6 Por ejemplo, las leyes universales son todas de probabilidad nula, como veremos.

refiere a sus características esenciales, será conservado en todos los trabajos ulteriores.

Se puede considerar que todos los trabajos publicados desde hace quince años en el dominio de la lógica inductiva derivan de la obra de **Carnap**. La mayoría se asigna como objetivo ya sea extender los resultados establecidos en *Logical Foundations of Probability,* ya sea modificar los métodos que se empleaban allí a fin de captar mejor su espíritu. Añadamos que la mayoría son sólo esbozos y no obras sistemáticas. Esas razones bastan para explicar que comencemos nuestro análisis por el examen profundo de una obra que, en ciertos aspectos, puede parecer hoy anticuada, pero cuyo conocimiento es indispensable para la comprensión de los desarrollos ulteriores.

1. Los fundamentos lógicos de la probabilidad.

Logical Foundations of Probability lleva a la definición explícita de un grado de confirmación para todas las fórmulas de ciertos sistemas semánticos de un tipo particular. La morfología de estos sistemas es la de los cálculos de orden 1 que sólo contienen un número finito de predicados monádicos y el símbolo de igualdad. Además, las reglas de verdad imponen que las variables individuales tengan como dominio de variación el conjunto de los designata de las constantes individuales, cuyo cardinal no sobrepasa, por supuesto, el enumerable; en otros términos, todo objeto tiene un nombre en el sistema. Se trata, por tanto, de formalismos de alcance muy restringido.

En su estudio, **Carnap** utiliza sistemáticamente los conceptos que había definido en su *Introduction to Semantics,* cuyo fecundo carácter prueba de este modo. Su procedimiento se caracteriza por el hecho de que un cierto número de conceptos semánticos se definen en el lenguaje objeto o, más bien, encuentran allí sus equivalentes. Interesa describir con precisión el sistema utilizado y definir algunas nociones que serán indispensables en lo que sigue. Sin embargo, a fin de unificar notación y terminología, nos tomaremos algunas libertades en esta exposición.

El alfabeto de los lenguajes estudiados por **Carnap** contiene, además de los signos de puntuación, los siguientes símbolos:

1) Un sistema de conectores proposicionales: "$\sim$, V, &", siendo introducidos los otros conectores por definición. Ni que decir tiene que todo sistema completo convendría igualmente.

2) Una constante proposicional: "t" (que designará el valor de verdad "verdadero"). Por supuesto, se podría prescindir de ella o introducirla por definición.

3) Una serie infinita de variables individuales: "$x_1, x_2, \ldots$," cuyos nombres propios serán respectivamente: $i_1, i_2, \ldots$, siendo i su nombre común.

4) Una serie finita o enumerable de constantes individuales: "$a_1, a_2, \ldots$" cuyos

nombres propios serán respectivamente in_1, in_2, ..., siendo *in* su nombre común.

5) Un número finito de predicados monádicos: "P_1, P_2, ..., P_π" cuyos nombres propios serán respectivamente pr_1, pr_2, ..., pr_π, siendo *pr* su nombre común.

6) Un predicado diádico: "=", llamado predicado de igualdad.

7) El cuantificador universal se escribirá con la notación parentética habitual; siendo introducido el existencial, con la notación "$\exists$", por definición.

Un lenguaje que contenga π predicados monádicos se llamará lenguaje L_n^π, si contiene además n constantes individuales; lenguaje L_∞^π, si contiene una infinitad de constantes individuales. En la metalengua, se utiliza la convención de concatenación para formar los nombres de expresiones.

Por recurrencia, se define la clase de las matrices en el conjunto de las expresiones de L; las matrices tendrán por nombre común en la metalengua a $\mathcal{M}$; $\mathcal{M}$ afectada por un índice será su nombre propio:

a) *pr* seguido de un *i* o de un *in* es una matriz.

b) "=" precedido y seguido de un *i* o de un *in* es una matriz.

c) *t* es una matriz.

d) Si $\mathcal{M}_j$ y $\mathcal{M}_k$ son matrices, también lo son: 1.° $\sim \mathcal{M}_j$; 2.° $\mathcal{M}_j \vee \mathcal{M}_k$; 3.° $\mathcal{M}_j$ & $\mathcal{M}_k$; 4.° $(i)\,\mathcal{M}_j$.

En una matriz obtenida por aplicación de la regla *d*, 4.° se dice que $\mathcal{M}_j$ es el campo del cuantificador (i) y las ocurrencias de la variable *i* en $\mathcal{M}_j$ se dicen ligadas. Toda ocurrencia de una variable que no está ligada se dice libre. El grado de una matriz es el número de variables que tienen en ella ocurrencias libres.

Naturalmente, una fórmula es una matriz de grado 0. Se llamarán atómicas las fórmulas obtenidas por aplicación de la sola regla *a*; fórmulas de identidad las obtenidas por aplicación de la sola regla *b*. Las fórmulas generales son las que contienen cuantificadores. Se llama especificación de una fórmula general, la expresión obtenida por supresión de las series de signos del tipo "(i)" y sustitución, en el campo de los cuantificadores, de la variable ligada por el cuantificador por un *in* cualquiera. Naturalmente, las especificaciones de una fórmula son fórmulas. En lo que sigue, utilizaremos como nombres de fórmulas, además de α, β, ..., minúsculas no utilizadas en otra parte, circunstancialmente afectadas por un índice[7].

Se introducen entonces reglas recursivas de verdad. Son las siguientes[8]:

1.° Una fórmula del tipo $\sim \alpha$ es verdadera si y sólo si α es falsa.

2.° Una fórmula del tipo $\alpha \vee \beta$ es verdadera si y sólo si α o β es verdadera.

3.° Una fórmula del tipo α & β es verdadera si y sólo si α y β son verdaderas.

---

[7] *L.F.P.*, § 16, pp. 65-68.
[8] *Ibid.*, § 17, p. 69.

4.° Una fórmula del tipo (*i*) $\mathcal{M}_j$, siendo $\mathcal{M}_j$ una matriz del grado 1, es verdadera si y sólo si lo son todas sus especificaciones.

Llamemos fórmulas fundamentales a las fórmulas atómicas y a sus negaciones. Dos fórmulas fundamentales, una de las cuales es la negación de la otra, constituyen una pareja fundamental. La regla *a*) permite afirmar que, de dos fórmulas fundamentales, una y sólo una es verdadera. En un lenguaje L_n^π, el conjunto de las parejas fundamentales es finito. Consideremos una conjunción que contiene como constituyentes una fórmula de cada una de las parejas fundamentales. Una conjunción tal se llamará una *descripción de estado*. El nombre común de las descripciones de estado será $\mathscr{Z}$, obteniéndose su nombre propio afectando con un índice a $\mathscr{Z}$. Si se excluyen, según el uso, las expresiones formadas por un número infinito de signos, esta definición del concepto de descripción de estado no se aplica en el caso de L_∞^π.[9]

Carnap impone como condición de interpretación del sistema que las constantes individuales designen objetos distintos y que los predicados sean nombres de propiedades lógicamente independientes. Se sigue de ahí que no se puede concluir de la verdad o de la falsedad de ciertas fórmulas atómicas la verdad o la falsedad de otras fórmulas. En cuanto a las fórmulas de identidad, son verdaderas o falsas según que las constantes que aparecen en ellas sean idénticas o distintas. Las fórmulas de identidad no generales están por tanto, todas ellas, determinadas lógicamente. Hagamos notar que estas reglas semánticas no nos hacen salir del marco del pensamiento formal. No se requiere en absoluto determinar de modo efectivo qué objetos y qué propiedades son designadas por las constantes descriptivas. Basta con suponer la independencia de las fórmulas atómicas y la condición relativa a las fórmulas de identidad. Así nos contentamos con imponer a los designata que satisfagan condiciones bastante débiles. Un sistema semejante, cuyas reglas de interpretación y de verdad han sido debilitadas, merecería más bien el nombre de "esqueleto de sistema semántico" que el de sistema semántico, como observa **Carnap**[10].

Naturalmente, la condición de independencia se expresa en términos de descripciones de estado: viene a suponer que las reglas de designación no introducen ninguna incompatibilidad entre las fórmulas cuya conjunción puede formar una descripción de estado. Dicho de otra manera, todas las descripciones de estado son posibles lógicamente. Como está claro que dos descripciones de estado son contradictorias, resulta de ahí que las descripciones de estado describen otros tantos estados de cosas lógicamente posibles.

Conocida la verdad de una descripción de estado, se puede concluir de ella la verdad o la falsedad de toda fórmula de L_n^π.[11] Si la verdad de $\mathscr{Z}$ permite establecer la de α, se dirá que α es verdadera en $\mathscr{Z}$. Sea α una fórmula y V la clase necesariamente

[9] En L_∞^π, la noción de descripción de estado se define así: una descripción de estado es una *clase* de fórmulas que contiene una fórmula de cada una de las parejas fundamentales.

[10] *L.F.P.*, § 15, pp. 58-59.

[11] La construcción de un procedimiento de decisión sería una cuestión de rutina.

finita de las descripciones de estado. Se llamará rango de α, y se designará por $R(\alpha)$, la sub-clase de V (eventualmente impropia o vacía) constituida por las descripciones de estado en las que α es verdadera[12]. Las fórmulas lógicamente válidas o L-verdaderas son aquéllas cuyo rango es V; las fórmulas lógicamente falsas o L-falsas son aquéllas cuyo rango es la clase vacía. Se puede establecer fácilmente que todas las tesis de los cálculos clásicos son lógicamente verdaderas. En cambio, una fórmula L-verdadera de L_n^π es, si no una tesis de los cálculos clásicos de primer orden, al menos deducible de una hipótesis que sólo sería verdadera en modelos que contengan n elementos, siendo n finito. Se obtienen muy fácilmente enunciados sobre los rangos respectivos de las fórmulas obtenidas por aplicación de las diferentes reglas de formación[13].

Sea el conjunto de las descripciones de estado de un lenguaje L_n y σ una permutación de las constantes individuales. Se puede prolongar σ al conjunto de las expresiones de L_n, siendo la transformada de una expresión por σ la expresión obtenida al sustituir las constantes individuales por sus transformadas por σ. Está claro que σ aplica el conjunto de las descripciones de estado en sí mismo (e incluso sobre sí mismo). Dos descripciones de estado, $\mathscr{Z}_i$ y $\mathscr{Z}_j$, se dirán *isomorfas* si existe una permutación tal que $\sigma(\mathscr{Z}_i) = \mathscr{Z}_j$. La isomorfa es, naturalmente, una relación de equivalencia. Se llamará *descripción de estructura* o *estructura* a la disyunción de las descripciones de estado que pertenecen a una misma clase de equivalencia[14]. El nombre común de las estructuras será $\mathscr{S}$, formándose los nombres propios por adición de índices. Observemos que descripciones de estado y estructuras son fórmulas de L_n^π.

Es preciso definir también algunos conceptos que se revelarán útiles en lo que sigue. Se pueden introducir, en los lenguajes L_n^π, predicados derivados por definiciones de tipo clásico. Se pueden introducir asimismo relaciones entre predicados designados por los mismos signos que los conectores primitivos o derivados del cálculo proposicional a título de abreviación. Así, "$\vdash (x)(pr_i x \supset pr_j x)$" se abrevia en "$\vdash pr_i \subset pr_j$"; así se hablará de implicación, de equivalencia, o de L-implicación, de L-equivalencia entre predicados. Los predicados primitivos y sus negaciones serán calificados como fundamentales; el conjunto constituido por un predicado primitivo y por su negación constituirá una *pareja fundamental* de predicados. Se llama *predicado* Q a una conjunción que comprende como constituyente un predicado de cada una de las parejas fundamentales. Los predicados Q son los nombres de las propiedades más fuertes que se pueden expresar en los lenguajes L_n^π; **Carnap** hace notar que este concepto corresponde a la idea aristotélica de *infima species*. Los predicados Q son, naturalmente, los átomos del álgebra de predicados. En

[12] *L.F.P.*, § 18, p. 78.

[13] Son, respectivamente, los complementarios, reuniones e intersecciones de los rangos de los componentes y la intersección de la clase finita de los rangos de las especificaciones. (*L.F.P.*, § 18, T. 1; p. 79.)

[14] *L.F.P.*, § 27, D. 1, p. 116.

L_n^π tienen un número de 2^π; se designará ese número por K y se señalará que las condiciones impuestas a la interpretación de los predicados impiden que ninguno de ellos sea lógicamente vacío.

Todo predicado, primitivo o derivado, es lógicamente equivalente a una disyunción, circunstancialmente vacía, de predicados Q que se denominará su *forma normal.* El número de términos de esta disyunción se llamará la *extensión lógica absoluta* del predicado; su cociente por K, su *extensión lógica relativa.* Un predicado fundamental tiene, naturalmente, una extensión lógica relativa igual a $1/2$.[15]

Toda fórmula en la que no figure el predicado de identidad puede ponerse en una forma en la que únicamente aparezcan predicados Q. A partir de esta constatación elemental, nos vemos llevados a hacer un cierto número de observaciones y a introducir algunos conceptos cuyo uso se revelará útil en lo que sigue[16]:

1.° A título de verdad lógica, se puede afirmar que a toda constante individual puede atribuírsele un predicado Q y sólo uno. Este hecho resulta de las dos leyes siguientes:

$$\vdash (x)(Q_1x \vee Q_2x \vee \ldots \vee Qx),$$

y, para todo i y todo j, con $i \neq j$, $\vdash (x) \sim (Q_ix \,\&\, Q_jx)$.

Se dirá que los predicados Q constituyen una *familia completa de predicados* o *división.*

2.° Resulta de ello que una descripción de estado puede escribirse bajo la forma siguiente, denominada *normal:* para cada constante individual, se indica qué predicado Q se le atribuye. Se llama distribución Q individual a la forma normal de la descripción de estado[17].

3.° La condición necesaria y suficiente para que dos descripciones de estado $\mathscr{Z}_i$ y $\mathscr{Z}_j$ sean isomorfas es que cada predicado sea atribuido a un mismo número de constantes en $\mathscr{Z}_i$ y en $\mathscr{Z}_j$. El dato del número de constantes a las que se atribuye cada uno de los predicados Q basta, por tanto, para caracterizar una estructura. El conjunto de esos números, llamados números Q, constituye una distribución Q estadística. Hay una correspondencia biunívoca entre las estructuras y las distribuciones Q estadísticas. Es fácil escribir una distribución Q estadística bajo la forma de una fórmula de L_n^π. Esta fórmula se identificará con la estructura que define[18]. La equi-

[15] *Ibid.*, § 31-32, pp. 122-130.
[16] *Ibid.*, § 34, pp. 134-137.
[17] Por ejemplo, en L_3^2, "Q_2a_1 & Q_3a_2 & Q_2a_3" es una distribución Q individual.
[18] En L_3^2, la distribución Q estadística que atribuye Q_1 a 0 constante, Q_2, a 2, Q_3 a 1, Q_4 a 0, se escribirá $(Q_2a_1, \,\&\, Q_2a_2 \,\&\, Q_3a_3) \vee (Q_2a_1 \,\&\, Q_3a_2 \,\&\, Q_2a_3) \vee (Q_3a_1 \,\&\, Q_2a_2 \,\&\, Q_2a_3)$.

valencia entre estructuras y distribuciones Q estadísticas permite una enumeración fácil de las estructuras relativas a los lenguajes L_n^π.[19]

4.º Las nociones que acabamos de presentar son susceptibles de una doble generalización. Ante todo, es posible aplicarlas a un conjunto determinado de constantes que no contenga todas las constantes de L_n^π. La distribución Q individual relativa a un conjunto C de constantes de L_n^π (o de L_∞^π si C es finito) será una fórmula que atribuya un predicado Q a cada una de las constantes de C. La distribución Q estadística relativa a C será una fórmula que indique a cuántas constantes de C se atribuye cada uno de los predicados Q. Naturalmente, es una estructura relativa al lenguaje que tiene π predicados y cuyo conjunto de constantes se reduciría a las constantes que figuran en C. Se hablará asimismo de números Q relativos a C.

5.º Por otra parte, las nociones precedentes pueden aplicarse a toda familia completa de predicados, o división, en lugar de a los predicados Q. Hagamos notar que una pareja fundamental de predicados constituye una división. Así, si $(M_i)_{i \in I}$ es una división, se hablará de distribución M individual o estadística, estando estos conceptos circunstancialmente relativizados a un conjunto determinado de constantes individuales.

2. La definición del grado de confirmación.

La exposición que precede permite resolver rápidamente el problema de la determinación de un grado de confirmación en los lenguajes L_n^π considerados. Hagamos notar, ante todo, que se puede definir una probabilidad absoluta o *medida* de las fórmulas. Basta con establecer $m(h) = c(h, t)$. En virtud del teorema de multiplicación. La probabilidad relativa vendrá dada por $c(h, e) = m(h \,\&\, e)/m(e)$.

Por otra parte, se impone que las fórmulas lógicamente equivalentes tengan idéntica medida: $\vdash \alpha = \beta$ implica $m(\alpha) = m(\beta)$. Pero la condición necesaria y suficiente de que dos fórmulas sean lógicamente equivalentes es que tengan el mismo rango. En el caso en que el lenguaje sólo contenga un número finito de constantes indivi-

[19] Sea, por ejemplo, L_{20}^4. Hay $2^4 = 16$ predicados Q canónicamente enumerables y que se designarán por $Q_1, \ldots, Q_{16}$. Una estructura se define desde el instante en que se dan los números n_i de las constantes a las que se atribuye el predicado Q_i. El número ζ de estructuras es el número de soluciones de la ecuación $\sum_{i=1}^{16} n_i = 20$ en enteros positivos.

Carnap resuelve efectivamente este problema. (*L.F.P.*, § 35, T. 1, p. 138.) Obtiene $\zeta = C_{2^\pi - 1}^{n + 2^\pi - 1}$. Del mismo modo se puede calcular el número de descripciones de estado que pertenecen a la estructura caracterizada por los números (n_i). Es igual a $\dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$ (*Ibid.*, T. 4, p. 140).

duales, toda fórmula es equivalente a la disyunción de las descripciones de estado contenidas en su rango. Se llamará forma normal a una fórmula así escrita, cuando las descripciones de estado están puestas, ellas mismas, en forma normal. Naturalmente, las descripciones de estado constituyen los átomos del álgebra de las fórmulas, que es, por tanto, de base finita. Sea α una fórmula; $R(\alpha)$ su rango; I_α el conjunto de los índices de las descripciones de estado contenidas en su rango. Se tiene $\vdash \alpha \equiv \bigvee_{i \in I_\alpha} \mathscr{Z}_i$. Si, como es legítimo hacer, se impone a la medida que satisfaga el principio de adición, se tendrá: $m(\alpha) = \sum_{i \in I_\alpha} m(\mathscr{Z}_i)$. Así, basta con definir una medida sobre las descripciones de estado para que se defina el grado de confirmación relativo a toda pareja de fórmulas cuya segunda proyección no es de medida nula. En los lenguajes L_n^π el número de descripciones de estado es finito; es, pues, posible limitarse a las medidas estrictamente coherentes, que **Carnap** denomina *regulares.* En otros términos, se impone a toda descripción de estado que sea de medida no-nula. Teniendo en cuenta la significación del concepto de descripción de estado, esta exigencia es razonable. Supone que a ningún estado de cosas lógicamente posibles se le atribuye una probabilidad nula.

En el caso de los lenguajes L_∞^π, la situación es más compleja: las descripciones de estado no son expresiones del lenguaje, su conjunto tiene la potencia del continuo y no puede, por tanto, atenerse a las medidas regulares. Además, las fórmulas no tiene formas normales; no constituyen un álgebra de base finita. Sin embargo, un simple rodeo, que consiste en imponer una nueva condición a las funciones de medida, o funciones m, va a permitir que este lenguaje resuelva los problemas particulares.

Consideremos un lenguaje L_n y el lenguaje L_{n+1} obtenido por adición de la constante individual a_{n+1} a L_n. Supongamos definidas medidas m_n y m_{n+1} respectivamente sobre L_n y L_{n+1}; sean c_n y c_{n+1} los grados de confirmación que ellas determinan; h y e, dos fórmulas no generales de L_n, que son también fórmulas de L_{n+1}. Las reglas de verdad les asignan las mismas condiciones de verdad, ya se las considere como fórmulas de L_n o como fórmulas de L_{n+1}.[20] Por eso es razonable suponer $c_n(h, e) = c_{n+1}(h, e)$. Se demuestra que esta condición, llamada *condición de ajuste (condition of fitting together)* es equivalente a la siguiente; para toda descripción de estado $\mathscr{Z}_i$ de L_n, se tiene $m_n(\mathscr{Z}) = m_{n+1}(\mathscr{Z})$.[21]

Sea una serie infinita de lenguajes $L_1, L_2, \ldots$, y las series correspondientes de m y de funciones c. Esas series serán llamadas series de funciones ajustadas si, para todo entero n, m_{n+1} se ajusta a m_n. La consideración de las series de funciones ajustadas va a ser determinante para la construcción de un grado de confirmación. Hagamos notar que el dato de una medida m_{n+1}, definida sobre L_{n+1}, determina enteramen-

[20] Lo que no ocurriría, si se tomaran en consideración fórmulas generales.

[21] *L.F.P.*, § 54, pp. 290-292. Hagamos notar que $\mathscr{Z}_i$ no es una descripción de estado de L_{n+1} sino una simple fórmula cuyo rango se compone de varias descripciones de estado. Se calcula su medida en L_{n+1} según los procedimientos ordinarios.

te la medida m_n definida sobre L_n que se ajusta con ella. En cambio, m_n no determina de manera unívoca a m_{n+1}, sino que impone simplemente condiciones restrictivas a su elección, si se quiere que m_{n+1} satisfaga la condición de ajuste[22]. Por otra parte, señalemos que la condición de ajuste permite determinar $c(h, e)$ cuando h y e no son generales, calculando el valor de $c(h, e)$ en un lenguaje restringido a las solas constantes que figuran esencialmente en h o en e.[23] Pero, sobre todo, la consideración de las series de funciones ajustadas permiten definir una medida y un grado de confirmación en los lenguajes L_∞^π.

Hemos dicho que, para esos lenguajes, las descripciones de estado no pueden ser definidas como fórmulas de L_∞^π. La definición que se ha propuesto de ellas es metalingüística: son clases de fórmulas. Desde ese momento no es posible servirse de los procedimientos de poner una fórmula en forma normal. Sin embargo, es posible definir grado de confirmación y medida como los límites hacia los que tienden grado de confirmación y medida en una serie de funciones ajustadas[24]. Una serie ajustada de funciones m define una medida m_∞ en L_∞^π. Se establecerá para toda fórmula, por definición, $m_\infty(\alpha) = \lim_{n \to \infty} m_n(\alpha)$. Del mismo modo, las funciones c correspondientes definen un grado de confirmación en L_∞^π: se tiene $c_\infty(h, e) = \lim_{n \to \infty} c_n(h, e)$. Se podría pensar que procede definir solamente m_∞ y, a partir de esa función, c_∞, estableciendo $c_\infty(h, e) = m_\infty(h, \& e)/m_\infty(e)$. Pero este procedimiento es menos ventajoso que el precedente; es posible que $c_n(h, e)$ tienda hacia un límite cuando n crece, en tanto que el cociente $m_\infty(h, \& e)/m_\infty(e)$ no está definido; ése es el caso si $m_\infty(e) = 0$, por ejemplo[25]. Por otra parte, los dos procedimientos no pueden llevar a determinaciones divergentes de c_∞; ocurre simplemente que el segundo deja indeterminados ciertos valores de c_∞, mientras que el primero los determina.

Pero si el cumplimiento de la condición de ajuste permite aplicar a L_∞^π los procedimientos de construcción del grado confirmación presentados previamente, no basta para determinar completamente las funciones de medida, como se puede comprobar fácilmente. Una nueva condición va a restringir considerablemente la arbitrariedad de la elección. Se trata de la condición de simetría. Para exponer su significación, partamos de un ejemplo concreto. P_1 es un predicado primitivo o derivado; h_1, "$P_1 a_i$"; h_2, "$P_1 a_j$"; a_i es diferente de a_j. Si el orden de las constantes individua-

[22] Sea $\mathscr{Z}_i$ una descripción de estado de L_n. Es una fórmula de L_{n+1} de medida $m_{n+1}(\mathscr{Z}_i)$. La condición de ajuste impone $m_n(\mathscr{Z}_i) = m_{n+1}(\mathscr{Z}_i)$ y m_n está unívocamente determinada si se da m_{n+1}. En cambio, supongamos dada m_n; sea $\bigcup_{j \in I} \mathscr{Z}_j'$ la reunión de las descripciones de estado, en número de 2_π, que están en el rango de $\mathscr{Z}_i$. Se debe tener $m_n(\mathscr{Z}_i) = \sum_{j \in I} m_{n+1}(\mathscr{Z}_j')$. Esta relación no basta para determinar m_{n+1}.

[23] Más exactamente, ocurrirá así desde el instante en que se admita que es preciso ceñirse a funciones m simétricas.

[24] *L.F.P.*, § 56, p. 302.

[25] *Ibid.*, § 56, p. 304.

les es estimado como puramente lexicográfico, si no expresa ninguna propiedad o relación de los objetos que designan, no hay ninguna razón para tratar de manera diferente constantes de las que no se sabe nada. Dado que h_1 y h_2 afirman respectivamente que los objetos a_i y a_j tienen la misma propiedad, se les atribuirá medidas iguales y se establecerá $m(h_1) = m(h_2)$. Ocurriría igual si la evidencia e no enseñara nada de un objeto que no enseñe de otro; en ese caso se tendría: $c(h_1, e) = c(h_2, e)$. Formulada en toda su generalidad esta condición, que vuelve a estimar como idénticos a los objetos en ausencia de razón contraria y, por tanto, como sustituibles sus nombres, se expresa así: sea σ una permutación de las constantes individuales que se prolonga en una transformación de las fórmulas, se tiene para toda pareja de fórmulas: $c(h, e) = c(\sigma(h), \sigma(e))$. Es equivalente a la siguiente condición, que retiene **Carnap**: $m(\mathscr{Z}_i) = m(\mathscr{Z}_j)$ si $\mathscr{Z}_i$ y $\mathscr{Z}_j$ son descripciones de estado isomorfas. Se llamará simétricas a las medidas que la cumplen y a los grados de confirmación que derivan de ella[26]. En L_∞^π, se dirá simétrico un grado de confirmación que está definido por una serie ajustada de funciones de confirmación simétricas. Según **Carnap**, la simetría expresa una exigencia intuitiva y puede contarse entre el número de las condiciones de adecuación que debe satisfacer un grado de confirmación. Estamos dispuestos a ver en ella, efectivamente, uno de esos principios sobre los que puede fundarse la lógica inductiva[27].

La condición de simetría restringe considerablemente la arbitrariedad de la elección de las funciones m. En efecto, basta con determinar una medida sobre un conjunto de estructuras, en lugar de definirla sobre el conjunto de las descripciones de estado. Ahora bien, el número de las primeras es mucho más débil que el número de las segundas. Por ejemplo, en L_5^2 esos números son, respectivamente, 56 y 1024; en L_{10}^3, 19448 y 2^{30} (o sea un poco más de mil millones)[28]. Pero, de todas formas, no basta para determinarlas completamente. Sin embargo, aun cuando no se determine la función m, sí se determinan algunos valores no triviales del grado de confirmación desde el momento en que nos ceñimos a las funciones simétricas[29]. Resultado de gran importancia y que puede parecer sorprendente. Por eso es necesario dar cuenta de su posibilidad.

Sean h y e dos fórmulas. Se supone que esas fórmulas son no generales, si pertenecen a un lenguaje L_∞^π; cualesquiera, si pertenecen a un lenguaje L_n^π. En efecto, en este último caso, una fórmula general es lógicamente equivalente a una fórmula no general. Después de lo que se ha dicho, se puede restringir el lenguaje a las constantes mencionadas esencialmente en h y e. Sean $R(e)$ y $R(h \,\&\, e)$ los rangos respectivos de h y de $h \,\&\, e$, y $(\mathscr{S}_j)_{j \in J}$ el conjunto de las estructuras. Sea respectivamente $N(j)$, $N(je)$, $N(jeh)$ el número de descripciones de estado que pertenecen a $\mathscr{S}_j$,

[26] *Ibid.*, § 90, D. 1 y 4, pp. 485-486.
[27] Cf. cap. IV, § 2.
[28] Ver el cuadro dado por **Carnap** (*L.F.P.*, § 35, p. 139).
[29] *L.F.P.*, § 93, p. 492.

$R(e) \cap \mathscr{S}_j$, $R(h \,\&\, e) \cap \mathscr{S}_j$. Se atribuye a $\mathscr{S}_j$ la medida m_j (con $m_j > 0$ y $\sum_{j \in J} m_j = 1$). Se tiene:

$$m(e) = m(R(e)) = \sum_{j \in J} m(R(e) \cap \mathscr{S}_j)$$

$$m(e \,\&\, h) = m(R(e \,\&\, h)) = \sum_{j \in J} m(R(e \,\&\, h) \cap \mathscr{S}_j)$$

Dado que nos ceñimos a las medidas simétricas, todas las descripciones de estado de una misma estructura tienen igual medida y, por tanto, se tiene:

$$m(R(e) \cap \mathscr{S}_j) = m_j \frac{N(je)}{N(j)}$$

$$m(R(e \,\&\, h) \cap \mathscr{S}_j) = m_j \frac{N(jeh)}{N(j)}$$

Se concluye de ahí:

$$c(h, e) = \frac{\sum_{j \in J} m_j N(jeh)}{\sum_{j \in J} m_j N(je)}$$

$c(h, e)$ será independiente de la medida elegida si, para todos los índices j tales que $N(je)$ no sea nulo, $\frac{N(jeh)}{N(je)}$ tiene el mismo valor.

Si las constantes de h son mencionadas en e y si, además, e es una distribución estadística, o implica una distribución estadística, $N(je)$ no difiere de 0 sino por un solo índice j y se satisface la condición. Ocurre lo mismo cuando $(M_i)_{i \in I}$ es una familia completa de predicados y e una distribución estadística con respecto a esta familia, y cuando h atribuye uno de los predicados M a una constante mencionada en e. Esas inferencias, que permiten pasar del conocimiento de una *población* a la probabilidad de enunciados concernientes a muestras que se extraen de ellas, son denominadas por **Carnap** *inferencias directas.* La simetría basta, pues, para concluir cuando se está en presencia de un problema de inferencia directa[30]. La derivación

[30] Se obtienen, en particular, los dos resultados siguientes: sea e la distribución estadística que atribuye M_i a n_i constantes (formando la familia $(M_i)_{i \in I}$ una división, siendo igual a n el tamaño de la muestra), h una distribución individual relativa a la misma división y que atribuye M_i a s_i constantes mencionadas en e, con $s = \sum_{i \in I} s_i$, h' la distribución estadística correspondiente a h. Se tiene:

$$c(h, e) = \frac{\prod_{i \in I} C_{n_i}^{s_i} \cdot s_i!}{C_n^s \cdot s!} \quad \text{y} \quad c(h', e) = \frac{\prod_{i \in I} C_{n_i}^{s_i}}{C_n^s}.$$

de la ley binomial es fácil, y suponiendo creciente a la población, **Carnap** obtiene la demostración del teorema de **Bernouilli**[31] bajo las formas clásicas.

Estos resultados son de un gran valor ya que prueban que con la sola hipótesis de simetría se vuelven a encontrar los teoremas fundamentales del cálculo de probabilidades en la teoría de la confirmación. Se consiguen sin que intervengan en su demostración las habituales consideraciones relativas a la independencia de las pruebas. Esto permite pensar que la condición de simetría no es sino la transcripción al plano formal, en un lenguaje preciso, de nociones utilizadas corrientemente, pero mal definidas.

En cambio, existen otros tipos de inferencias cuyo grado de confirmación no se puede determinar suponiendo solamente la simetría. Corresponden a los problemas cuya solución exige, en la teoría clásica, el recurso a los esquemas bayesianos. Son los problemas de inferencia predictiva en los que se infiere de una muestra a objetos que no están contenidos en ella. Así ocurre cuando en h se mencionan constantes que no figuran en e. **Carnap** propondrá ulteriormente toda una clase de funciones de confirmación simétricas, que además satisfacen todas las condiciones suplementarias, y que dan, en un caso semejante, valores diferentes de $c(h, e)$.[32] Es muy fácil dar cuenta de la existencia de situaciones parecidas. Consideremos el ejemplo siguiente: e es una distribución Q estadística relativa a una muestra determinada; h, una fórmula del tipo "$Q_i a_j$", no estando mencionada a_j en e. Limitemos el lenguaje a las constantes que figuran en e o en h. "h & e" sólo es verdadera en una estructura definida por los números $(n_1, n_2, ..., n_k)$. Pero, naturalmente, e es verdadera en otras estructuras, a saber, las obtenidas quitando 1 a uno de los números n_i y añadiendo 1 a otro número. Resulta de ahí que $c(h, e)$ dependerá de la medida de esas estructuras y que la restricción a las solas funciones simétricas no basta para determinar su valor en un caso tal.

Para llevar a buen término la teoría, y determinar efectivamente un grado de confirmación es, pues, necesario elegir una medida sobre las estructuras. Algunos autores han adoptado una extraña actitud en la solución de este problema. Han sostenido que era necesario recurrir a la experiencia para definir una medida sobre las estructuras. Tal es el caso de **Oppenheim** quien publicó en 1945 –el mismo año en que **Carnap** esbozaba de manera precisa el sistema de *Logical Foundations of Probability*– dos artículos, escritos uno en colaboración con **Hempel**[33] y el otro en colaboración con **Helmer**[34].

La medida de una estructura, decían, expresa la probabilidad que le otorgamos *a priori*. Determinarla sin recurrir a los datos experimentales sería volver a esas probabilidades *a priori* que la filosofía empirista condena. Se calificará de *apriorista* a toda

---

[31] *L.F.P.*, § 95-96, pp. 498-510.
[32] Se trata naturalmente del continuo de las funciones λ que será presentado en *C.I.M.*
[33] Cf. *D.D.C.*
[34] **Helmer** (O.) y **Oppenheim** (P.): *S.D.P.*

teoría "en la que la medida de una fórmula se determine de una vez por todas a partir del simple análisis de su estructura lógica"[35].

La terminología y el método de estos autores son muy ligeramente diferentes de los de **Carnap** y varían de un artículo a otro (por ejemplo, el segundo utiliza los conceptos de la lógica algebraica que no aparecen en el primero). Pero las divergencias son mínimas: los lenguajes considerados se supone que son cálculos no interpretados; pero se puede sustituir en sus textos la idea de tesis por la de verdad lógica[36]. Se suponen sin signo de identidad; con esta diferencia, su morfología es más o menos la de los lenguajes L_n^π o L_∞^π. Los conceptos utilizados para su estudio están muy próximos a los empleados por **Carnap** y el vocabulario, muy cercano[37]. Para la claridad de la exposición, traduciremos sistemáticamente al lenguaje de **Carnap**.

Pero los principios sobre los que se apoya la determinación del grado de confirmación son muy diferentes de los mantenidos por **Carnap**: la simetría es respetada, pero no se establece como primer principio, y se violará la coherencia de las funciones de confirmación. En cambio, se pide que el grado de confirmación satisfaga el principio de adición y que sus valores coincidan con los dados por la regla de **Reichenbach**, cuando ésta pueda aplicarse. Pero, sobre todo, se indica que el recurso a la experiencia es el único procedimiento aceptable para medir las estructuras. ¿Qué entenderemos por eso?

Para determinar el valor del grado de confirmación se utilizará una medida m_e cuya elección dependerá de la evidencia e, y se establecerá $c(h, e) = \dfrac{m_e(h \,\&\, e)}{m_e(e)}$. Pero, ¿cómo elegiremos m_e en función de e? No se puede tomar la medida en la que e da la probabilidad más fuerte, pues su determinación exige el uso de esquemas bayesianos y, por tanto, la introducción de esas probabilidades *a priori* que se atacan con ardor[38]; por eso se eligirá la medida en la que e confiera la mayor verosimilitud; dicho de otra manera, aquélla que maximice $m(e)$. ¿Por qué esta elección? Porque la adopción del método de la máxima verosimilitud sería un imperativo de la filosofía empirista en materia de probabilidad.

Antes de examinar la coherencia del procedimiento, la pertinencia de la argumentación, interesa ver las consecuencias de la elección que se ha hecho. Hagamos notar, ante todo, que el problema vuelve a ser determinar las estructuras que maximizan la medida de e. Expliquémonos: Sea $\mathscr{S}_j$, como precedentemente, una estruc-

[35] *D.D.C.*, p. 113.

[36] Dado que las reglas de interpretación mantenidas por **Carnap** suponen la independencia de las fórmulas atómicas, las dos nociones casi coinciden.

[37] Se identifica una fórmula y su rango, se reduce a formas normales, se define una función m. Se habla, no de distribución Q estadística, sino de distribución sobre células L, lo que es equivalente a esto ya que esta definición se presenta en términos de frecuencias relativas y no de valores absolutos.

[38] *S.D.P.*, p. 107.

tura; $N(j)$ y $N(j_e)$ el número de las que están contenidas respectivamente en $\mathscr{S}_j$ y en $\mathscr{S}_j \cap R(e)$. Si se atribuye a $\mathscr{S}_j$ la medida m_j, se tendrá $m(e) = \sum_{j \in J} m_j \cdot \frac{N(j_e)}{N(j)}$ con $\sum_{j \in J} m_j = 1$. Es preciso pues atribuir una medida nula a todas las estructuras tales que $\frac{N(j_e)}{N(j)}$ no sea máximo. **Helmer**, **Hempel** y **Oppenheim**, por otra parte, plantean el problema en los términos siguientes: determinar la distribución Q estadística (que denominan distribución sobre células L) que maximiza e[39]. Si $\frac{N(j_e)}{N(j)}$ tiene un máximo único cuando j recorre el conjunto de los índices de estructuras, m_e quedará perfectamente determinada. Si no, se termina simplemente por concluir que ciertas estructuras (las que no maximizan la cantidad precedente) son de medida nula. El primer caso se presenta si se encuentra que e es lo que se llama una "distribución perfecta", es decir, una distribución Q estadística relativa a las constantes que figuran en ella[40]. Pero hay otras circunstancias en las que se viene a parar al mismo resultado[41]. Además, ocurre que $c(h, e)$ es constante para todas las medidas compatibles con e, incluso si m_e no está determinada unívocamente[42]. Quedan los otros casos. Se podría pensar en elegir la medida que minimiza $c(h, e)$, lo que parece conforme a la prudencia. Pero esta elección tiene consecuencias inaceptables[43].

El método propuesto no puede pues probabilizar sino una parte de los lenguajes tomados en consideración. Sin embargo, no es ésa una razón para condenarlo sin apelación. En realidad, hay otras consecuencias inaceptables. Si es fácil probar que

---

[39] El procedimiento que emplean para el cálculo de la medida de e muestra que suponen implícitamente la simetría de las funciones m: si una distribución estadística atribuye Q_i a n_i constantes sobre n y si e atribuye Q_i a s_i constantes sobre s, perteneciendo esas constantes a la muestra toman como medida de e: $\prod_{i \in I} (n_i/n)^{s_i}$. (*Ibid.*)

[40] En rigor, no ocurre así. Es posible que las frecuencias relativas de los predicados Q en la muestra no determinen una estructura única porque los números proporcionales a esas frecuencias y cuya suma es igual al número de constantes del lenguaje considerado no son enteros. En realidad, el teorema propuesto para probar que una "distribución perfecta" es una distribución Q estadística (*D.D.C.*, T. 8-3, p. 108) no concierne sino a los lenguajes L_∞^π que son electivamente tomados en consideración en los trabajos de que hablamos.

[41] *D.D.C.*, pp. 109-110. Se da un ejemplo, pero no se establece ningún teorema que delimite la clase de las fórmulas que determinan una medida única.

[42] Esta circunstancia se produce cuando, siendo M un predicado, e es una distribución estadística de una muestra relativa a la división $\{M, \sim M\}$, y h de la forma "Ma" (no perteneciendo a a la nuestra). Se tiene entonces $c(h, e)$ igual a la frecuencia de M en la muestra (Cf. *S.D.P.*, pp. 50-51 y *D.D.C.*, p. 113). Por otra parte, ese resultado es conforme a la regla de **Reichenbach**: nuestros autores han establecido que una definición adecuada del grado de confirmación debe permitir recobrar los resultados de esta regla en el caso de que pueda aplicarse. (*D.D.C.*, 5,3, p. 102.)

[43] No se satisfaría el principio de adición, ni siquiera bajo la forma de la complementariedad (*D.D.C.*, p. 111).

el grado de confirmación que acabamos de definir satisface el principio de adición, no ocurre lo mismo con el principio de multiplicación. Sólo en casos privilegiados se tiene $c(h \,\&\, h', e) = c(h', h \,\&\, e) \cdot c(h, e)$, dado que la medida utilizada para calcular c varía con el segundo argumento. La coherencia no se respeta, por tanto, como indicamos. El sacrificio ha parecido demasiado importante a la mayoría de los autores para que acepten tomar en consideración el método de **Helmer, Hempel** y **Oppenheim** y los veinte años que nos separan de su publicación no han brindado apenas ocasión de verlo retomado y desarrollado.

Insostenible en razón de las consecuencias a las que lleva, el método en cuestión se apoya sobre principios sospechosos: se pretende que no es conforme al pensamiento empirista elegir una medida de una vez por todas. El recurso a la máxima verosimilitud para determinar la medida de las estructuras coincidiría con el principio que utiliza un "jugador razonable"[44] y que es también empleado en la investigación estadística: "admitir que las frecuencias observadas en el pasado se conservarán en el futuro"[45]. Todo procedimiento distinto sería una vuelta disfrazada al *apriorismo* y volvería a negar que la experiencia sea la fuente de nuestros conocimientos.

Esta extraña argumentación no resiste un examen: desde el instante en que se estima el grado de confirmación como una función de dos argumentos, se reconoce que la experiencia nos enseña alguna cosa. *A fortiori*, si se añaden algunas condiciones que expresan el "learning from experiment" que debe satisfacer[46]. No supone dar prueba de una mayor fidelidad al espíritu del empirismo sino tener en cuenta e dos veces, una a título de argumento de $c(h, e)$; otra, para medir las estructuras; es ser inconsecuente. Todas las teoría metalógicas se apoyan en cierto sentido sobre el concepto de probabilidad *a priori*, dado que autorizan la definición de una función m estableciendo por definición $m(e) = c(e, t)$. Se comprende que algunos autores se nieguen a tomar en consideración esta noción y condenen globalmente la teoría metalógica de la probabilidad[47]. Su posición es discutible pero coherente. No es ése el caso de los autores de que hablamos: admiten la idea de medida lógica, por tanto de probabilidad *a priori*, pero rechazan toda determinación *a priori* de esas probabilidades. Los principios que fundan la elección de su método permanecen inciertos. Se comprende que, en esas condiciones, se haya renunciado a un método tan mal fundado y cuyas consecuencias eran devastadoras.

Pero hay que reconocer que, excluido este método, no existe principio que permita escoger con toda seguridad una medida sobre las estructuras. A primera vista, ese problema únicamente puede resolverse mediante una apelación oculta al principio de indiferencia. Sin embargo, se pueden concebir dos aplicaciones distintas de él otorgando una medida igual ya sea a las descripciones de estado, ya

[44] ¡Extraño jugador razonable que no utiliza una función de apuesta coherente!
[45] *D.D.C.*, p. 113.
[46] Cf. cap. IV, § 2, e *infra* cap. XII, § p.
[47] Es el caso de **Nagel** (Cf. *P.T.P., passim* y *C.T.I.*, § 2).

sea a las estructuras, del mismo modo que en los problemas clásicos de bombos se puede atribuir una probabilidad igual sea a las distribuciones individuales o constituciones (que especifican qué propiedades posee cada bola del bombo), sea a las distribuciones estadísticas (que especifican simplemente el número de bolas que tienen una propiedad[48] determinada). Utilizado sin restricción, el principio de indiferencia lleva a contradicciones. Aquí, su uso es limitado. Ninguna de las dos aplicaciones proyectadas es inconsistente; pero el problema de la elección entre las dos formulaciones se mantiene entero.

La solución más simple, conforme a las reglas del uso corriente, consiste en dar una medida igual a todas las descripciones de estado. Propuesta de modo efectivo por **Wittgenstein**[49], es en realidad inadmisible, como vamos a demostrar: sea e una distribución estadística relativa a una muestra determinada y a una división $(M_i)_{i \in I}$; h una fórmula de la forma "$M_i a_k$", no perteneciendo a_k a la muestra. Si se adopta el principio de **Wittgenstein**, se encuentra que $c(h, e)$ es igual a la anchura lógica relativa de M_i y, por tanto, constante, cualquiera que sea el tamaño de la muestra observada y el número de constantes que figuran en ella a las que se atribuye el predicado M_i-[50]. Aceptar una medida semejante sería reconocer, por tanto, que la experiencia no nos enseña nada.

Falta otorgar una medida igual a todas las estructuras. Designaremos esta medida por m^* y por c^* el grado de confirmación definido a partir de m^*. Pero también es preciso asegurarse de que la serie de funciones $m_1^*, m_2^*, \ldots$, es ajustada, dado que la función m^* está definida para cada lenguaje particular. **Carnap** no hace alusión a esta exigencia, pero afirma que se puede probar que toda fórmula no general tiene la misma medida en todos los lenguajes L a los que pertenece[51]. De ahí resulta el cumplimiento de la condición de ajuste y m^* se definirá pues igualmente para los lenguajes L_∞^π.

Pero estas razones no justifican positivamente la elección de la función m^*. A fin de juzgar acerca de la racionalidad de la función c^*, vamos a examinar el sistema que se funda sobre su uso.

3. El método inductivo c*

La definición de un grado de confirmación resuelve el problema estrictamente formal cuya solución era el objetivo de la lógica inductiva. Pero, de todas formas, el

[48] Cf. **Carnap** (R.): *C.I.M.*, § 13.

[49] *T.L.P.*, 5.15. **Wittgenstein** habla, no de descripciones de estado, sino de "razones de verdad". El contexto muestra la equivalencia de esas dos nociones.

[50] *C.I.M.*, § 13, En *L.F.P.* (§ 110, p. 565); este resultado está probado ya, pero para el solo caso de un lenguaje que únicamente contiene un predicado. La extensión al caso general es, por otra parte, inmediata.

[51] *L.F.P.* § 110, p. 566.

sistema formal constituido no podrá ser utilizado en una teoría de la inducción en tanto que no hayan recibido una respuesta las cuestiones que dependen de lo que hemos denominado *metodología de la inducción*. Llamaremos *método inductivo* al conjunto compuesto por la teoría formal y por las reglas que gobiernan su aplicación. De hecho, únicamente es posible pronunciarse sobre el valor de una lógica inductiva si se tienen en cuenta reglas metodológicas que deben adjuntársele. Por eso vamos a someter a nuestro análisis crítico al método fundado sobre la función c^* y no sólo al sistema formal que culmina en la definición de esta función.

La dificultad esencial de un examen semejante reside en el hecho de que **Carnap** no ha desarrollado nunca sistemáticamente el método inductivo c^*. La función c^* es presentada únicamente en el apéndice de *Logical Foundations of Probability* y la mayoría de los resultados son propuestos sin demostración. Este escrito había sido primitivamente concebido como la primera parte de una obra en dos tomos y el examen metódico de c^* remitido a la segunda parte. Doce años más tarde, en su prefacio a la segunda edición de *Logical Foundations of Probability*, **Carnap** confiesa haber renunciado a su proyecto inicial[52]. El rápido desarrollo de los trabajos en el dominio de la lógica inductiva hacía vana la publicación de un texto sistemático. Resultados recientemente conseguidos mostraban la imperfección de la vía adoptada en *Logical Foundations of Probability* y la inadecuación de algunas conclusiones. Tales son las razones del abandono del proyecto primitivo. En esas condiciones, puede parecer ocioso someter a un análisis crítico una obra cuyas insuficiencias reconocía su propio autor. Sin embargo, no creemos que esta razón justifique una renuncia a nuestro proyecto: el conocimiento de las razones que han incitado a **Carnap** a modificar su sistema es necesario para comprender los desarrollos ulteriores; por otra parte, viene bien tomar la medida exacta de lo que se ha conseguido desde esta primera obra.

No se puede dudar del hecho de que **Carnap** somete a un tratamiento riguroso los problemas que conciernen al fundamento lógico de la probabilidad. Por eso se buscarán en vano contradicciones formales. Pero no se puede concluir de ahí que el método sea satisfactorio. Antes es preciso asegurarse de que su elección no es arbitraria, que no choca con ninguna de las exigencias intuitivas que precedentemente hemos tratado de registrar, que permite codificar los procedimientos intuitivos estimados como válidos y que su extensión es suficiente. Tales son, en un primer análisis, los criterios que sirven para juzgar la validez de un método inductivo.

El primer reproche que puede dirigirse a la teoría de **Carnap** es que sólo tiene un campo de aplicación extremadamente restringido. Resulta de la definición de los lenguajes L^π que únicamente un pequeño número de inferencias inductivas puede encontrar una expresión en ellos. Todo el mundo reconoce la estrechez del marco en el que **Carnap** ha constituido su teoría y la necesidad de extender su campo de aplicación. Pero de ahí a estimar como vanos resultados que no conciernen sino a

[52] *Ibid.*, pp. XIII y sig.

un cálculo de primer orden con sólo predicados monádicos en número finito, hay un paso que no se puede dar. **Hempel** y **Oppenheim**, cuya teoría conoce los mismos límites, hacen observar justamente que el dominio de la lógica deductiva fue todavía más restringido durante dos mil años[53]; **Burks**, cuya devoción a las ideas de **Carnap** dista de ser total, hace notar que los trabajos clásicos referentes a la inducción, los de **Bacon**, **Mill** o **Keynes**, padecen la misma limitación[54]. Además, sea cual sea su pobreza, los lenguajes L_n^π permiten de todas formas la expresión de ciertos tipos de inferencias inductivas que juegan un papel fundamental en la ciencia probabilitaria; la teoría de **Carnap** aporta su fundamento lógico a los métodos de inferencia directa; hemos visto cómo la sola hipótesis de simetría lleva al establecimiento del teorema de **Bernouilli**. En suma, es injusto concluir, de la limitación del método c^*, su inutilidad.

Es indiscutible que **Carnap** obtiene un cierto número de resultados dignos de interés en la solución de los problemas de inferencia predictiva. El método fundado sobre la función c^* es superior a la regla de **Reichenbach** o a los esquemas bayesianos utilizados por **Laplace**. Si ocurre así es porque tiene en cuenta un factor omitido precedentemente, a saber, la anchura lógica de los predicados. Este hecho aparece con evidencia cuando se aborda el problema de la inferencia predictiva simple, que es el siguiente: sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de predicados que constituye una división; e' es una distribución individual de una muestra de constantes s relativas a (M_i); e la distribución estadística correspondiente; h_j la fórmula "$M_j a$" (no perteneciendo a a la muestra). Si e atribuye M_j a s_j constantes de la muestra y si ω_j es su anchura lógica y k el número de predicados Q del lenguaje utilizado, se tiene:

$$c^*(h_j, e) = c^*(h_j, e') = \frac{s_j + \omega_j}{s + k}.^{55}$$

Hagamos notar que, cuando crece el tamaño de la muestra, ese resultado tiende asintóticamente hacia el dado por la regla de **Reichenbach**. Pero se evitan las consecuencias enojosas de esta última regla que se vuelve a encontrar gracias a los pequeños valores de s. Así, en el caso en que $s = 1$ y $s_j = 1$, no se concluye $c^*(h_j, e) = (1 + \omega_j)/(1 + k)$. En el caso en que $k = 2 (\pi = 1)$ y $\omega_j = 1$, se vuelve a encontrar la regla de **Laplace**. Pero se evitan las contradicciones de su formulación tradicional[56].

---

[53] *D.D.C.*, p. 100.

[54] *P.T.I.*, § 3.

[55] Hagamos notar que, a partir de este resultado, se puede calcular el grado de confirmación de toda distribución individual o estadística de constantes distintas de la muestra, relativamente a una división $(M_i)_{i\in I'}$ siendo la evidencia la distribución individual o estadística de la muestra con respecto a la misma división.

[56] Sean P_1 y P_2 dos predicados incompatibles; s_1, s_2 y s como precedentemente; h_1 es "$P_1 a_k$"; h_2, "$P_2 a_k$" (no perteneciendo a_k a la muestra). Se tiene, con la regla de **Laplace**:

$$c(h_1, e) = \frac{s_1 + 1}{s + 2} \qquad c(h_2, e) = \frac{s_2 + 1}{s + 2}$$

Aquí no aparece contradicción en la medida en que se tiene en cuenta la extensión lógica de los predicados cuya omisión, inevitable en tanto que se ha ignorado la dependencia del grado de confirmación con respecto a un lenguaje determinado, era generadora de antinomias.

Al mismo tiempo que aporta una solución aceptable a los problemas de inferencia inductiva simple, el método c^* permitiría dar cuenta de ciertas formas de inducción, tenidas por válidas tradicionalmente, pero cuyo fundamento no se había podido descubrir, ni tampoco hacer su teoría. Se trata del razonamiento por analogía, según **Carnap**. Sean dos constantes individuales, a_i y a_j y dos predicados, M_1 y M_2, con $\vdash M_2 \subset M_1$ (y, por tanto $\omega_1 > \omega_2$). e designa "M_2a_i & M_1a_j"; h, "M_2a_j".

En otros términos, sabiendo que a_i y a_j tienen en común la propiedad M_1, que es la analogía conocida, y que a_i posee la propiedad M_2, se busca si a_j tiene esta misma propiedad, que implica M_1 y que es la *analogía inferida.* Ahora bien, se encuentra $c^*(h, e) = \dfrac{\omega_2 + 1}{\omega_1 + 1}$.[57] Si se recuerda que una propiedad es tanto más "fuerte" cuanto menor es su extensión lógica, este resultado es conforme a la intuición.

Se pueden obtener fácilmente, por otra parte, resultados más generales: supongamos siempre $\vdash M_2 \subset M_1$ · e informa de que una muestra está compuesta por objetos s que tienen todos la propiedad M_2 y que a, que no pertenece a la muestra, tiene la propiedad M_1. Si ω_1 y ω_2 designan respectivamente la anchura lógica de M_1 y de M_2, sucede que:

$$c^*(h, e) = \frac{s + \omega_2}{s + \omega_1}$$

Si en la muestra fueran M_1 todos los objetos, pero solamente s' fueran M_2, se tendría: $c^*(h, e) = \dfrac{s' + \omega_2}{s + \omega_1}$. **Carnap** no da la demostración de estos resultados; pero es muy simple. Recordemos que si $(M_i)_{i \in I}$ es una división; e, una distribución individual que atribuye M_i a s_i constantes de una muestra de objetos s; s' la distribución

---

y por tanto:

$$c(h_1 \vee h_2, e) = \frac{s_1 + s_2 + 2}{s + 2}$$

Pero aplicando directamente la regla al predicado $(P_1 \vee P_2)$, se obtiene:

$$c(h_1 \vee h_2, e) = \frac{s_1 + s_2 + 1}{s + 2}$$

[57] *L.F.P.*, § 110, p. 569.

estadística correspondiente; h la fórmula "$M_i a$" (no perteneciendo a a la muestra), ω_i la anchura lógica de M_i, se tiene:

$$c(h, e) = c(h, e') = \frac{s_i + \omega_i}{s + k}.$$ [58]

En el último caso tomado en consideración, designemos por e_1 la fórmula que enuncia que los s objetos de la muestra son todos M_1 y que s' de entre ellos son M_2; por h_1 la fórmula "$M_1 a$"; por h, la fórmula "$M_2 a$". Se tiene $\vdash h \supset h_1$, además $\vdash e \equiv (e_1 \,\&\, h_1)$. Ahora bien, por el teorema de multiplicación, se obtiene:

$$c^*(h, e_1 \,\&\, h_1) \cdot c^*(h_1, e_1) = c^*(h \,\&\, h_1, e_1)$$

o, dado que

$$\vdash h \,\&\, h_1 \equiv h, \qquad c^*(h, e) = \frac{c^*(h, e_1)}{c^*(h_1, e_1)}$$

Pero se tiene:

$$c^*(h, e_1) = \frac{s' + \omega_2}{s + k}$$

$$c^*(h_1, e_1) = \frac{s + \omega_1}{s + k}$$

De ahí el resultado.

Se puede medir fácilmente, por otra parte, la aportación de la analogía. Estamos tentados a tomar como medida de esta aportación la diferencia $c^*(h, e) - c^*(h, e_1)$ y a exigir que sea positiva[59]. Pero eso supone olvidar que la analogía conocida entre a y las constantes de la muestra hace que h sea redundante con una parte de e. Esta medida es, por tanto, imperfecta. Preferimos razonar así: cuando se sabe ya que a es un M_1, para establecer que es un M_2, basta con probar que se tiene: $M_1 a \supset M_2 a$; de otra manera basta con probar que a posee la propiedad $(\sim M_1 \vee M_2)$.

Tal es la hipótesis h' cuya probabilidad hay que establecer, en primer lugar sin analogía, es decir, en el caso en que la evidencia es e_1; después, cuando se sabe que los objetos de la muestra y a son análogos en el sentido de que poseen todos la propiedad M_1, es decir, en el caso en que la evidencia es e. La función c da cuenta de la analogía si se tiene $c^*(h', e_1) < c^*(h', e)$ para todo triplete $\langle h', e_1, e\rangle$ (se po-

[58] *Ibid.*, § 110, p. 568.

[59] **Achinstein**, en un artículo en el que intenta mostrar que la función c^* no da cuenta de la analogía, se contenta con esta condición presentada bajo una forma particular (cf. *V.A.C.*, § 4, p. 216).

dría tolerar que, en ciertos casos, el signo de desigualdad sea reemplazado por una igualdad).

Dado que se tiene $\vdash e \supset (h \equiv h')$, se sigue de ahí que $c^*(h', e) = c^*(h, e) = \frac{s' + \omega_2}{s + \omega_1}$. Se calcula fácilmente $c(h', e_1)$ desde el instante en que se ha notado que, en la muestra, ningún objeto tiene la propiedad $\sim M_1$, y por tanto que s' de entre ellos tienen la propiedad $(\sim M_1 \vee M_2)$ que tiene por anchura lógica $(k - \omega_1 + \omega_2)$.[60]

$$c(h', e_1) = \frac{s' + (k - \omega_1 + \omega_2)}{s + k} = \frac{s' + \omega_2 + (k - \omega_1)}{s + \omega_1 + (k - \omega_1)}$$

Pero se constata, entonces, que $c^*(h', e_1) > c^*(h', e)$. En suma, el conocimiento de la analogía entre a y las constantes de la muestra tiene un efecto negativo. Demos un ejemplo: sea un lenguaje con tres predicados. Se ha observado una muestra de 10 objetos que son todos P_1; 8 de ellos son P_2. Sea a un nuevo objeto. Se sabe que es un P_1. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un P_2? $\omega(P_1) = 4$, $\omega(P_1 \& P_2) = 2$. Aplicando la fórmula propuesta precedentemente, se tiene $c(h, e) = \frac{8 + 2}{10 + 4} = \frac{5}{7}$. Pero, de hecho, puesto que se sabe ya que a es un P_1, falta por establecer no que es un P_2, sino simplemente que posee la propiedad $\sim P_1 \vee P_2$, cuya extensión lógica es igual a 6. Si se ignorara que a es un P_1, es decir, si no se conociera ninguna analogía entre a y la muestra, la probabilidad de la hipótesis h' "$\sim P_1 a \vee P_2 a$", calculada empleando la regla de inferencia directa sería $c(h', e) = \frac{8 + 6}{10 + 8} = \frac{7}{9}$.

Este resultado, por lo menos paradójico, hace dudar de la aptitud de la función c^* para dar cuenta del razonamiento por analogía. Pero, como ha mostrado **Achinstein**[61], existen otras situaciones en las que la función c^* no puede justificar el razonamiento por analogía, ni siquiera si se mantiene el criterio débil. Son aquéllas donde existe una diferencia conocida entre los objetos de la muestra y el objeto con respecto al cual se infiere. Consideremos el razonamiento siguiente: se ha observado que diversos metales que tienen numerosas propiedades comunes con el rodio son buenos conductores del calor. Se infiere de ahí que el rodio lo es. Este razonamiento puede ser formalizado en un lenguaje L_n^π. Se supone: 1.° que el rodio se diferencia, al menos en un predicado de L, de los otros metales observados; 2.°, que se dispone de observaciones de las diversas muestras de metales completas en el senti-

[60] En efecto, M_1 se escribe bajo la forma de una disyunción de ω_1 predicados Q y, dado que $\vdash M_2 \subset M_1$, M_2 está compuesto por una disyunción de ω_2 predicados Q comprendidos todos ellos en M_1 y, por tanto, no comprende ninguno de los predicados Q contenidos en $\sim M_1$.

[61] *V.A.C.*, pp. 211-213.

do que permiten atribuir a cada uno de ellos uno de los predicados Q de L_n^π. Se concluye de ahí que la probabilidad de la conclusión inferida es la misma sea cual sea el grado de analogía entre los cuerpos observados y el rodio. Este resultado se consigue desde el instante en que se introduce en L_n un predicado complejo $(R \supset C)$, significando R "ser rodio", C, "ser buen conductor". Todos los cuerpos observados que no son rodio poseen ese predicado. Ahora bien, la probabilidad de la conclusión depende solamente de la distribución estadística de la muestra relativa a la división $\{(R \supset C), \sim (R \supset C)\}$. Como hace notar Mary **Hesse**: "el argumento de **Carnap** sólo se aplica si sabemos que se pueden atribuir las mismas propiedades a los individuos... y que no conocemos ninguna diferencia entre ellos. No es, en el mejor de los casos, sino una idealización de la situación real"[62]. Vayamos más lejos: toda observación de un cuerpo que no es rodio acrecienta la probabilidad, no de la ley general "Todo cuerpo que es rodio es buen conductor" –veremos pronto que es nula–, sino del enunciado singular: "Si este cuerpo es rodio es buen conductor". Se vuelve a encontrar la paradoja de **Hempel** bajo una forma nueva. El argumento "débil" destinado a probar que se da cuenta del razonamiento por analogía se viene abajo.

Carnap reconoce ese fracaso[63] que, por otra parte, no concierne únicamente a la función c^*, como veremos en el capítulo siguiente. Lo atribuye al hecho de que no se ha tenido en cuenta el grado de proximidad de los predicados Q de L_n^π y que, por ejemplo, $P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, P_3$ y $P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, \sim P_3$ se consideran, en L_n^π, tan similares como $P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, P_3$ y $\sim P_1 \,\&\, \sim P_2 \,\&\, \sim P_3$, cuando en la primera pareja hay dos predicados primitivos comunes y en la segunda ninguno. La introducción de la noción de familia de predicados y de lenguajes que contienen familias de predicados distintos tendrá por objetivo evitar consecuencias enojosas.

Del mismo modo, parece que el método c^* excluye que se tenga en cuenta la variedad de los casos de confirmación. Cierto que **Carnap** afirma dos veces lo contrario[64] en *Logical Foundations of Probability*. Pero no se puede establecer que la probabilidad de una inferencia inductiva simple crece más rápidamente cuando las constantes de la muestra son diferentes y conocidas como tales. Incluso se puede establecer fácilmente lo contrario. Basta con constatar que si e_Q es una distribución Q estadística de una muestra; e_p la distribución estadística de la misma muestra relativa a $\{P, \sim P\}$; h_p la fórmula "Pa" (no perteneciendo a a la muestra); s el tamaño de la muestra y s_p el número de constantes de la muestra que poseen la propiedad P, se tiene:

$$c^*(h_p, e_p) = c^*(h_p, e_Q) = \frac{s_p + \omega_p}{s + k}$$

[62] *A.C.T.*, p. 289.
[63] *V.A.R.*, p. 225.
[64] *L.F.P.*, § 110, p. 575; cf. igualmente, *O.I.L.*, § 15.

Este resultado significa que importa poco la variedad de las constantes de la muestra y el conocimiento que se tenga de ella.

Más adelante, en respuesta a las objeciones de **Achinstein**, **Carnap** reconocerá que él mismo ha dudado de la aptitud del método c^* para tener en cuenta la variedad de los casos[65]. Pero se esforzará en probar que, en cierto sentido, da cuenta[66] efectivamente de ellos. Su demostración, que retoma una argumentación de **Nagel** bastante compleja, es poco convincente. Atañe al siguiente caso: la ley cuyo grado de confirmación hay que calcular es una implicación universal de un lenguaje que no contiene sino un número finito de constantes. Se conoce la distribución individual de una muestra en relación con una división. Se demuestra entonces que el incremento de probabilidad de la ley es mayor cuando se observan elementos de esta muestra, si se los elige tan variados como sea posible con respecto a esa muestra. En suma, se puede explicar por qué la variedad de los casos de confirmación acrecienta la probabilidad de una ley a condición de suponer que en la evidencia figura una fórmula que indica las frecuencias observadas de las diversas especies de objetos tomados para contrastar la ley. Sea cual sea el valor de este argumento refinado, en todo caso no se podría resolver plenamente la dificultad suscitada antes.

Sin embargo, estas dificultades no ponen verdaderamente en peligro el método c^*, incluso si descubren sus insuficiencias. El hecho de que viola uno de los requisitos intuitivos impuestos a las funciones de confirmación es mucho más grave. Si h es una ley universal, es decir, una fórmula universal no lógicamente válida de L_∞^π: $m^*(h) = 0$. Asimismo $c^*(h, e) = 0$, si e es una fórmula singular. Además, ese resultado no concierne sólo a la función c^* sino a todas las funciones simétricas[67]. Está claro que es extremadamente molesto; una teoría de la confirmación que otorga a toda fórmula universal una probabilidad nula, ¿no prueba acaso su ineptitud para justificar el conocimiento científico? Teniendo todas las leyes universales una probabilidad equivalente a enunciados lógicamente falsos, no se ve ninguna razón que pueda recomendar elegir una más bien que otra. ¿No es acaso el signo de un fracaso irremediable del sistema de **Carnap**?

Apremiado para resolver este grave problema, **Carnap** responde mediante una doble argumentación. Trata de mostrar, en primer lugar, que el conocimiento científico puede constituirse sin que se introduzcan en él "leyes", es decir, fórmulas generales. La prueba de ello es que su ausencia no impediría la existencia de un conocimiento suficiente para las necesidades de la acción: lo que sirve efectivamen-

[65] *V.A.R.*, p. 222.
[66] *Ibid.*, pp. 223-225.
[67] **Popper** ha tratado de mostrar que hipótesis muy débiles conducen necesariamente a este resultado. (Cf. *L.S.D.*, pp. 363 y sig.) Esta demostración es contestada por **Leblanc** (*P.C.L.*). Sea cual sea la validez de la argumentación de **Popper**, veremos que el resultado en cuestión se vuelve a encontrar efectivamente en todos los sistemas que toman de **Carnap** lo esencial de su método.

te en la acción no son las leyes universales, sino las predicciones singulares que se pueden deducir de ellas. Nada impide concebir que el conocimiento científico se presente como un sistema de reglas que permita tales predicciones. La idea de que exige leyes universales no sería más que un prejuicio. Cierto que es más "cómodo" resumir nuestro conocimiento dándole la forma de leyes: "la utilización de leyes para hacer predicciones no es indispensable. Sin embargo es cómodo, naturalmente, establecer leyes universales en los libros de física, biología, psicología, etc"...[68] Dar un grado de confirmación nulo a las leyes universales no sería, en modo alguno, asestar un golpe criminal al conocimiento científico. Una teoría que se limite a la inducción "de lo particular a lo particular" basta para dar cuenta de él.

Ahora bien, en el caso que nos ocupa, sería fácil constituir esta teoría de la inducción de lo particular a lo particular y explicar por qué otorgamos una confianza más o menos grande a las leyes universales. Para las leyes de L_∞^π se define un concepto nuevo, el de *confirmación especificada* (*Instance confirmation*). El grado de confirmación especificado de una fórmula general es el grado de confirmación de su especificación por una constante que no figura en la evidencia[69]. Que esté unívocamente determinado y no dependa de la constante que se ha elegido, es algo que resulta de la simetría de c^*. Su valor expresa la probabilidad de una predicción singular fundada sobre el uso de la ley. Las leyes, aun cuando todas tengan un grado de confirmación nulo, tienen grados de confirmación especificados variables. De este modo, se halla fundada la creencia más o menos grande que les otorgamos.

En apariencia, la introducción de este nuevo concepto permite escapar de una situación desesperada. Pero la solución propuesta no es sino la peor. El grado de confirmación especificado no es un grado de confirmación, ni siquiera una función coherente, como reconoce **Carnap**. Además, sólo está definido para las leyes de L_∞^π y su extensión a lenguajes más amplios suscitará dificultades considerables que son análogas a las que vuelve a encontrar una definición general del concepto de caso de confirmación. Pero, sobre todo, toda la argumentación huele a artificio. **Carnap** no logra la convicción del lector cuando quiere probar que la introducción de leyes no es más que un procedimiento mnemotécnico destinado a abreviar el discurso científico, argumento retomado de una tradición que depende del más sumario nominalismo y al cual se habían ya adherido ciertos positivista, como **Schlick**. Parece dudoso que se pueda explicar así el conocimiento científico: la definición y el uso del menor concepto científico, ¿no suponen acaso leyes? Los pasos del hombre de cien-

[68] *L.F.P.*, § 110, p. 575.

[69] Incluso se puede definir, en ciertos casos, una noción más precisa: el grado de confirmación especificado y cualificado. Esta noción se aplica a las leyes que tienen la forma de una implicación universal: $\vdash M \subset M'$. El grado de confirmación especificado y cualificado es la probabilidad de que una constante que no pertenece a la evidencia sea un M' si es un M. En suma, la cualificación excluye los casos paradójicos de confirmación. Pero es preciso hacer notar que la función así definida no es coherente. Es más: no es invariante cuando se pasa de una ley a una ley L'-equivalente (por ejemplo, de la ley dada a $\vdash \sim M' \subset \sim M$). Esto indica el poco uso que se puede hacer de este concepto.

cia comportan inferencias por las cuales se pasa de unas leyes a otras leyes. ¿Qué tratamiento les otorgaremos en una lógica inductiva, si las leyes que figuran en la evidencia son todas de probabilidad nula? Tal es el contenido de las objeciones que **Nagel** pone a **Carnap**[70]. Responder que esas inferencias pueden ser construidas de tal suerte que figuren en la evidencia no las leyes, sino los casos en los que han sido confirmadas, es una mala respuesta que vuelve a renunciar a la imagen que la ciencia da de ella misma. Los sistemas de leyes, ordenados en teorías deductivas, son sustituidos por una polvoreda de hechos porque se es incapaz de dar cuenta de la organización teórica que caracteriza el conocimiento científico. La insuficiencia de esta solución es patente y se comprende que **Carnap** haya renunciado a defenderla[71].

Hay que concluir, pues, que la función c^* no satisface los requisitos intuitivos impuestos a todas las funciones de confirmación. Se puede invocar en su defensa que todos los demás métodos inductivos que se han propuesto tienen el mismo defecto: dan una probabilidad nula a las leyes universales. Pero este argumento, utilizado por **Carnap**[72], es de doble filo, pues se tiene derecho a ver en él la prueba de la imposibilidad de toda lógica inductiva.

El examen de las reglas metodológicas que determinan las condiciones de aplicación del sistema revelará también debilidades sorprendentes. Algunas de estas condiciones están incluidas en la semántica de los sistemas L_n^π. Así la independencia lógica de las fórmulas atómicas, necesaria para que ninguna descripción de estado sea contradictoria lógicamente, exige que los predicados y las constantes individuales designen respectivamente propiedades distintas y lógicamente independientes y objetos distintos. Estas condiciones atañen a todas las funciones de confirmación definidas por el procedimiento de **Carnap**. Veremos cómo pueden debilitarse. No ocurre lo mismo con la *completud de la descripción* que es propia de la aplicación de la función c^*. Por universo de L_n^π se entiende el conjunto de los objetos nombrados en ese sistema cuando se elige una interpretación. Para que una interpretación sea admitida, se exigirá que "los predicados de L_n^π sean suficientes para expresar todos los atributos cualitativos de los individuos del universo de L_n^π"[73]. Toda propiedad elemental de los objetos deberá tener por nombre un predicado de L_n^π.

La razón de ser de esta regla metodológica es fácil de descubrir: **Carnap** define el concepto sintáctico de extensión lógica de un predicado. En una inferencia inductiva simple, la probabilidad de la conclusión, siendo absolutamente igual todo lo demás, crece con la extensión lógica del predicado considerado. Según **Carnap**, la omisión de este factor es precisamente la causa mayor de los errores de sus predecesores. Pero la extensión de un predicado depende del sistema en el que está metido.

---

[70] *C.T.I.*, pp. 802-803.

[71] *P.R.*, p. 988.

[72] *Ibid.*, p. 977. En el mismo momento, **Carnap** añade que ha llegado a construir funciones c que no están afectadas por ese defecto, pero que son muy complicadas. Sin embargo, no da ningún ejemplo.

[73] *L.F.P.*, § 18, p. 74.

Hay casos en que la adición de un predicado nuevo modifica $c^*(h, e)$, incluso si este predicado no figura en ninguno de los argumentos[74]. En consecuencia, para evitar que el grado de confirmación no tenga sino un valor convencional, no se puede dejar a una elección arbitraria la determinación del número de predicados de un lenguaje. Será preciso que ese número se funde en la naturaleza de las cosas. Por eso se exige que reciban un nombre en el sistema considerado no sólo las propiedades a propósito de las cuales se infiere, sino todas las propiedades de los objetos de que se habla. Tal es el contenido de la condición de completud.

No hay ni que decir que esta condición sólo tiene sentido si el número de propiedades elementales del universo de L^π es finito. En otros términos, como reconoce **Carnap**, se debe admitir la validez del principio de variedad limitada. Sin embargo, este principio aparece únicamente bajo una forma limitada dado que sólo se exige la finitud del número de las propiedades de un conjunto limitado de objetos determinados –los nombrados en los sistemas L^π– y no la finitud del número de las propiedades de todos los objetos del universo sensible. En cambio, lo que se requiere no es la simple seguridad de que ese número es finito sino su conocimiento efectivo. Un requisito semejante es drástico: la probabilidad de una inducción concerniente a un sector limitado del conocimiento, que se expresa por ciertos predicados, no puede determinarse antes de que se conozca el número de las propiedades elementales de los objetos de que se habla. **Nagel** escribe que la condición de completud hace que la probabilidad calculada por el biólogo de que el próximo cuervo observado sea negro dependerá de la introducción de un nuevo predicado en la teoría sociológica[75]. Hay alguna mala fe en esta objección, pues no se trata de predicados "teóricos" sino de aquéllos que expresan propiedades observables y, además, solamente se trata de las propiedades del universo de L^π. Ahora bien, los grupos sociales no forman parte del universo del discurso biológico. Pero no se podría sino aprobar a este autor cuando prosigue mostrando que la determinación del número de propiedades no es una verdad lógica y no puede obtenerse al término de inducciones complejas que, por otra parte, dependen de la ciencia-ficción y no de la ciencia efectiva.

La definición del concepto de extensión lógica daba su superioridad a la vía de **Carnap**. En realidad, constituye su debilidad esencial: reduce el método c^* al estatuto de teoría de la inducción secundaria, contra el deseo explícito de su autor, e impone a su aplicación una condición inadmisible. Ante las críticas a las que fué sometida esta condición, **Carnap** debió reconocer que se tenía derecho a rechazar todo sistema que la imponga a título de regla metodológica adjunta[76]

---

[74] Por el tipo de indiferencia citado anteriormente se pasa de $c(h, e) = \frac{s_i + \omega_i}{s + k}$ a $c(h, e) = \frac{s_i + 2\omega_i}{s + 2k}$.

[75] *C.T.I.*, pp. 792-794.

[76] En *P.R.* no se esboza ninguna tentativa de defensa del método c^*. **Carnap** reconoce que es plenamente legítima la condenación de la condición de completud de la descripción.

La insuficiencia del método c^* es, pues, innegable. Sin embargo, no se podría concluir de ahí la esterilidad de los resultados conseguidos en *Logical Foundations of Probability:* Ha sido propuesto un método para definir un grado de confirmación; no logra plenamente su objetivo; sin embargo, lo esencial del procedimiento de **Carnap** debe mantenerse. De hecho, todos los trabajos ulteriores que tienden a fundar una teoría metalógica de la probabilidad inductiva son fuertemente deudores de esta primera obra de **Carnap**. Si sacrifican su letra, es para liberar su espíritu.

De manera general, las investigaciones emprendidas han culminado en una multitud de resultados fragmentarios, pero no en ninguna sistematización de una amplitud comparable a la de *Logical Foundations of Probability*. Tienen un doble fin: extender el campo de aplicación del método de **Carnap** y construir un grado de confirmación más satisfactorio que el método c^*. Se han ocupado particularmente de resolver de manera satisfactoria el problema de las leyes universales y de evitar imponer la completud de descripción a título de condición de aplicación.

Hemos de abordar ahora el dominio frondoso de los trabajos contemporáneos, cuyo examen es necesario para quien quiere juzgar acerca de la aptitud de la lógica inductiva para resolver los problemas epistemológicos de la inducción.

CAPITULO XII

LAS TEORIAS DE LA CONFIRMACION Y EL LENGUAJE DE LA CIENCIA

La teoría de la confirmación debía poner las bases de la lógica inductiva con la que se identifica la epistemología formal del conocimiento experimental. Pero el método utilizado en *Logical foundations of probability* se revela como inadecuado para su función. Por una parte, su campo de aplicación es demasiado restringido y, por otra, lleva a mantener una función cuyas imperfecciones hemos denunciado. Por ello, diversos autores han trabajado por modificarla.

¿Sobre qué puntos debe incidir esta reforma? En el método propuesto por **Carnap** es fácil distinguir dos pasos sucesivos: el primero comporta la definición de algunos conceptos semánticos; culmina en la introducción del concepto de descripción de estado. Así, el problema de la definición del grado de confirmación se reduce al de la determinación de una medida sobre el conjunto de las descripciones de estado. El segundo procede por introducción progresiva de condiciones de adecuación que limitan poco a poco la clase de las medidas aceptables. Un sumario examen muestra que una extensión del campo de aplicación de la teoría depende de una modificación en el primer paso. En cambio, para evitar realizar una elección desafortunada entre las medidas posibles, es preciso modificar el segundo.

Por lo que concierne al primer problema, se han obtenido resultados considerables desde el momento en que se ha tomado conciencia de la necesidad de modificar los conceptos fundamentales y, en particular, de evitar la noción de descripción de estado. Es natural que, en este campo, los progresos esenciales sean obra de un autor conocido por sus trabajos de semántica formal: J.G. **Kemeny**. Actualmente se está en posesión de un conjunto de conceptos y métodos que permiten, para una clase muy amplia de lenguajes, reducir el problema de la definición de un grado de confirmación a la determinación de una medida sobre un conjunto específico. Toda teoría de la confirmación parece que seguirá necesariamente el camino de su uso. ¿Quiere decir esto que se podrán aplicar estos procedimientos a un lenguaje suficientemente comprensivo que englobe el conjunto del conocimiento científico? Veremos que no es exactamente así.

Al contrario, en lo que atañe al segundo problema, los resultados alcanzados son mucho menos satisfactorios. El objetivo que se había fijado consistía en evitar una elección tan desafortunada como la de la función c^*. Al mismo tiempo se pedía que

estuvieran mejor justificadas las condiciones de adecuación que permiten limitar la clase de medidas relativas a los lenguajes. **Carnap** se dedicó en primer lugar a estas tareas. La publicación de *The continuum of inductive Methods* cumplía parcialmente este programa primitivamente asignado a un segundo volumen de *Logical Foundations of Probability* que no se publicó. Introduciendo nuevos requisitos, **Carnap** aislaba una familia paramétrica de funciones de confirmación y emprendía el examen de los valores comparados de las diversas funciones de esta familia. Pero, en este ámbito, los progresos conseguidos son insuficientes: los métodos introducidos por **Kemeny** permiten virtualmente extender en modo considerable el campo de aplicación de la teoría de la confirmación. Sin embargo, estas extensiones exigen sistemas de condiciones de adecuación mucho más fuertes que los inicialmente previstos. Su investigación no se ha llevado a cabo plenamente; así, nos encontramos en presencia de una multitud de resultados fragmentarios, ciertamente no desprovistos de interés, pero ninguno de los cuales tiene la amplitud del sistema de las *Logical Foundations of Probability*. Algunos problemas han recibido una solución satisfactoria, pero otros han resistido el análisis. En todo caso, no ha sido propuesto ningún sistema que sea coextensivo al lenguaje de la ciencia. Además, quedan pendientes múltiples cuestiones relativas a la estructura de este lenguaje. Por lo que concierne a la definición de los conceptos teóricos, al estatuto de los postulados de significación, al contenido del vocabulario de observación, ninguna solución se ha impuesto. Habida cuenta del estado de los trabajos, todo intento de construir una lógica inductiva proporcionada a las necesidades del conocimiento experimental parece prematura. Tal es, de modo manifiesto, la opinión de **Carnap**.

¿Quiere decir esto que sea imposible reflexionar sobre la posibilidad de una tal extensión, sobre las dificultades que encontraría la aplicación de los métodos que deben ser empleados necesariamente, sobre la naturaleza de los resultados que se obtendrían? No lo creemos. Un cierto número de datos están bien establecidos: se sabe, si no lo que es el lenguaje de la ciencia, sí, al menos, lo que no es; se sabe determinar ciertas condiciones de adecuación que deberían necesariamente cumplirse. Estos datos bastan para establecer algunas conclusiones no triviales sobre la extensión de la lógica inductiva a un lenguaje que permita englobar la totalidad del actual conocimiento experimental.

Desde nuestro punto de vista, semejante examen se impone. En efecto, contra las objeciones que destacaremos ulteriormente es fácil argüir que no conciernen más que a los sistemas formales actualmente existentes, pero que no alcanzarían a teorías técnicamente mejor elaboradas o cuyo campo de aplicación fuera más extenso. Nos será preciso mostrar que la teoría formal de la confirmación debe necesariamente chocar con obstáculos infranqueables cuando se quiere darle una extensión suficiente. Tal es el objeto de este capítulo.

Es natural que nuestro examen comience por el estudio de los perfeccionamientos efectivamente aportados al método de **Carnap**. Daremos el primer lugar al que está mejor asegurado y que concierne a la introducción de una nueva semántica;

después estudiaremos los sistemas de condiciones de adecuación que han sido propuestos. A continuación será necesario exponer los principales resultados que pueden ser obtenidos y que consisten bien en modificaciones, bien en extensiones de los resultados de *Logical foundations of probability*. Pero, como acabamos de explicar, no podremos permanecer en este estadio. Será preciso pasar de lo real a lo posible, de lo que está hecho a lo que podría estarlo, y destacar los rasgos esenciales de los sistemas que se perfilan en el horizonte de la investigación.

1. Semántica y medida lógica según Kemeny

La construcción de una función de confirmación supone el uso de una semántica. El dominio de la lógica inductiva no puede, pues, exceder al campo de aplicación de los conceptos sobre los que reposa esta semántica. El defecto esencial del método de **Carnap** consiste en que la semántica utilizada está fundada sobre la noción de descripción de estado que no recibe sentido más que en condiciones muy restrictivas: una descripción de estado es una expresión del lenguaje-objeto que está definida sólo para los sistemas formales que no comprenden más que un número finito de constantes individuales y de predicados de primer orden. Además, se exige que el dominio de las variables se identifique con el conjunto de las constantes individuales y que las fórmulas atómicas sean independientes.

Carnap mismo ha insistido sobre las limitaciones de su método que resultan de estas exigencias[1]. Así, las condiciones relativas a la independencia de las fórmulas atómicas impiden que se introduzca en un lenguaje simultáneamente un predicado cualitativo "absoluto" y el predicado "comparativo" correspondiente. Supongamos que pertenecen a un mismo lenguaje los dos predicados P y R, respectivamente con 1 y 2 argumentos, y que se interpreta P como designando la propiedad "está caliente" y R como designando la relación "está más caliente que"; está claro que "Rab" es incompatible con "$\sim Pa \ \& \ Pb$". Las fórmulas atómicas no son pues independientes; ciertas descripciones de estado son contradictorias y el método de *Logical foundations of probability* no es, por tanto, aplicable. En la recensión de esta obra[2], **Kemeny** hacía notar que la condición de independencia conduce a la exclusión de todas las propiedades o relaciones que tienen una "estructura lógica". Antes de aplicar el método de **Carnap**, sería necesario asegurarse de que la interpretación dada a ciertos predicados no impide tener por lógicamente independientes las fórmulas atómicas en las que figuran. Por ejemplo, estarán excluidas las "propiedades comparativas". Si interpreto "R" como designando la relación "está más caliente que", "$Rab \ \& \ Rbc$" es incompatible con "$\sim Rac$". **Bar-Hillel** retomaba el argumento, haciendo notar las consecuencias drásticas de esta condición ya que la mayoría de las relaciones están lógicamente estructuradas.

---

1 *L.F.P.*, § 18, p. 73.
2 Cf. *C.R.L.*

Es verdad que sería fácil evitar el obstáculo con una pequeña modificación del método de **Carnap**. **Bar-Hillel** proponía no tomar en cuenta más que descripciones de estado no contradictorias y definir sólo a partir de ellas las nociones semánticas esenciales: rango y verdad lógica, medidas y grados de confirmación[3]. Así se aseguraría la posibilidad de extender la lógica inductiva a lenguajes que comprendan predicados diádicos. La repugnancia manifiesta de **Carnap** en aceptar esta solución resulta bastante extraña. Antes que manejar lenguajes cuyas constantes descriptivas estén lógicamente estructuradas, **Carnap** propone diversos expedientes[4]. Las argumentaciones que presenta para excluir a los predicados poliádicos son capciosas[5]. En realidad, parece que **Carnap** se ha desinteresado de las dificultadas suscitadas por la extensión de la lógica inductiva a sistemas más fuertes que los sistemas L^{π}, problemas cuya solución, a su juicio, no era urgente.

En todo caso, la escasa resonancia de las sugerencias de **Bar-Hillel** no tendrá graves consecuencias. No podían llevar sino a modificaciones superficiales, mientras que una transformación profunda del método de **Carnap** venía exigida en razón de la debilidad radical de la semántica sobre la que descansa. R. M. **Martin** hace notar acertadamente que esta semántica, fuerte en el sentido de que incluye prácticamente el conjunto de las matemáticas –lo cual no tiene inconvenientes ya que los problemas tratados no son cuestiones de fundamento lógico– no se aplica más que a sistemas débiles. En particular, muestra la imperfección de las reglas de verdad que identifican el dominio de las variables individuales con el conjunto de las constantes y limitan así este dominio al enumerable. En estas condiciones, esta semántica, restringida por naturaleza a los lenguajes de orden 1, no puede concernir a los lenguajes de orden 1 en los que el dominio de las variables no sea enumerable y que son necesarios para formalizar el conjunto de las matemáticas[6]. El límite esencial de la semántica de **Carnap** deriva del hecho de que todo objeto del campo de interpretación debe tener un nombre en el sistema, condición resultante de su intención de transcribir la semántica en lenguaje-objeto. El abandono de este proyecto se impone si se quiere reformar el método de **Carnap** para dotarle de su plena extensión.

Correspondería a **Kemeny** el mérito de haber aportado una solución satisfactoria a estos problemas. En el momento en que **Carnap** publicaba *Logical Foundations of Probability*, **Kemeny** estaba ya en posesión de una semántica más rica que la suya

---

[3] Cf. *N.S.D.*

[4] Cf. *P.R.I.* El expediente esencial consiste en sustituir los predicados diádicos por familias de predicados monádicos.

[5] **Carnap** indica que la enumeración de estructuras en un lenguaje que contenga predicados diádicos es un problema matemáticamente sin resolver y que, en consecuencia, la extensión de la función c^* a tales lenguajes no conduciría a ningún resultado efectivo (*L.F.P.*, § 31, páginas 123-124). Argumento doblemente inadmisible: 1.º Nada asegura que se haya de limitar a la función c^* y a enumerar estructuras. 2.º En la perspectiva de **Carnap** se trata de mostrar que se puede *definir* una función de confirmación, no que sea posible *calcular* sus valores: el problema planteado por **Carnap** es el de fundamentar una teoría de la inducción, no el de construir un procedimiento que permita calcular efectivamente la probabilidad de cualquier hipótesis.

[6] *C.C.S.*, p. 273.

y que descansaba sobre el concepto de modelo definido en un artículo publicado en 1948.[7] En el informe dedicado a este libro, **Kemeny** indicaba que una descripción de estado no es más que la transcripción en lenguaje objeto de un modelo; pero es en un artículo publicado en 1953: *A Logical measure fonction* donde aplicará sistemáticamente esta noción, y la semántica fundada sobre su uso, a los problemas de la lógica inductiva. Aparentemente su ambición se detiene en la solución de algunos problemas particulares: extender el sistema de **Carnap**, abolir la condición de independencia, resolver el problema de la probabilidad de las leyes universales y definir algunos conceptos utilizables en un análisis epistemológico (como el concepto de "contenido" de una fórmula). Las soluciones aportadas son, por lo demás, de interés y originalidad variables. Sólo algunas de ellas exigen el uso del concepto de modelo. Pero, en realidad, la obra de **Kemeny** tiene un alcance muy distinto: extrayendo la esencia del método de **Carnap**, lo libera de torpes formulaciones que dificultaban su extensión.

Fue preciso esperar al artículo de **Kemeny** para que el concepto de modelo recibiera una definición a la vez rigurosa y suficientemente general. Lo valioso de esta definición es, por una parte, que se aplica a todo sistema que encuentra su expresión en la teoría de tipos de Church (lo que prácticamente incluye todo sistema efectivo) y, por otra, que a partir de ella se definan las categorías semánticas y sintácticas fundamentales. Para nuestro propósito no es indispensable que presentemos esta definición bajo la forma rigurosa y muy compleja que le da **Kemeny**. Nos bastará mostrar cómo el concepto de modelo, definido para los tradicionales cálculos de orden 1, puede también ser aplicado a otros sistemas y permite fundar una semántica coherente.

La teoría de **Church** se caracteriza por la distinción de varios tipos de variables y de constantes individuales, tipos en número finito designados respectivamente por ι, ι', ι'', etc; y el uso del operador λ que permite construir expresiones que designan las funciones que aplican las variables de un tipo determinado en otro tipo. A cada serie de símbolos construida conforme a ciertas reglas morfológicas se le atribuirá un tipo determinado. Todos los tipos se definen recursivamente a partir de los tipos "fundamentales": ι, ι' ... y de otro tipo designado por o. Las fórmulas cerradas serán las expresiones de tipo o que no contienen ninguna variable libre[8]. Así, un símbolo de tipo $(o\iota)$ designará un predicado monádico que admite por argumento una variable o una constante de tipo ι; un símbolo de tipo $((o\iota)\iota')$, un predicado diádico que admite un primer argumento de tipo ι y un segundo argumento de tipo ι'; un símbolo de tipo $(o(o\iota))$, un predicado monádico de orden 2 que tiene por argumento predicados monádicos cuyos argumentos son de tipo ι, etc...

A propósito de tales lenguajes se define el concepto de *semi-modelo* de la manera siguiente: a cada tipo α, un semi-modelo hace corresponder un conjunto "concreto"

---

[7] Cf. *M.L.S.*

[8] Modificamos ligeramente la terminología de **Kemeny**.

R, llamado dominio de las expresiones de tipo α que satisface las siguientes condiciones:

1.° R_0 contiene dos elementos, llamados valores de verdad y designados respectivamente por V y F.[9]

2.° Si I designa el conjunto de tipos de constantes y de variables individuales $\bigcup_{i \in I} R_i$ es no vacío y está separado de R_0.

3.° $R_{(\alpha\beta)}$ es el conjunto de funciones que aplican R_β en R_α.

Se puede entonces introducir un procedimiento de evaluación semejante al utilizado para los lenguajes de orden 1. A las expresiones de tipo α se hacen corresponder, sirviéndose de reglas recursivas de evaluación, elementos de R_α. Las definiciones de los conceptos de fórmula válida y de fórmula realizable son obvias[10].

Naturalmente el cardinal del semi-modelo es el cardinal de $\bigcup_{i \in I} R_i$. Según el uso, nos ceñimos a los semi-modelos matemáticos en los que los campos de interpretación están compuesto de objetos matemáticos. Más en concreto, si el cardinal del modelo no excede el enumerable, se identifica $\bigcup_{i \in I} R_i$ con el conjunto de enteros naturales o con el segmento compuesto de los n primeros enteros. Además, se asignan a los conectores proposicionales las funciones de verdad clásicas.

Queda por resolver un problema: ¿pueden tener el mismo valor constantes diferentes? Resulta obvio que esta cuestión no tiene sentido más que si se trata de constantes del mismo tipo (suponiendo al menos los conjuntos R_i separados, restricción sin consecuencias graves). Para las constantes no individuales, la solución se impone: dos predicados distintos como "animal racional" y "bípedo sin plumas" pueden tener la misma extensión.

Impedir que constantes distintas tengan el mismo valor supondría elevar al nivel de verdades lógicas simples relaciones empíricas. Respecto a las constantes individuales no se podría decidir sin dudar: ¿no es posible dar nombres distintos a un mismo objeto ignorando su identidad? Sin embargo, **Kemeny** impone que elementos distintos sean asignados a constantes individuales distintas[11]. Pero será fácil modificar su definición sobre este punto.

Suponiendo que esté definido, sobre el lenguaje considerado, un sistema formal, se introduce así el concepto de modelo de este sistema: un semi-modelo es un

---

[9] Es decir, sobre este punto, la definición de **Kemeny** es menos general que las definiciones algebraicas que admiten modelos "no semánticos" donde R_0 es el conjunto de los elementos de un álgebra de **Boole** cualquiera (cf., por ejemplo, **Rasiowa** y **Sikorski**, *M.M.*, cap. 8, § 2, pp. 281 y sig.). Pero la definición algebraica, en cambio, no se aplica más que a lenguajes de orden 1.

[10] *M.L.S.*, p. 21.

[11] *M.L.S.*, p. 20. Hagamos notar que más tarde confesará no haber concedido sino una insuficiente atención a este problema.

modelo si los axiomas del sistema son válidos en este semi-modelo, si las reglas de inferencia preservan la validez y si hay al menos una fórmula no válida (esta última restricción tiene por finalidad la eliminación de modelos triviales). Pero, desde nuestra perspectiva que se orienta de forma esencial a la construcción de una semántica, se puede proceder de modo diferente y mantener la noción de modelo como una noción primera: dado un lenguaje formal, un sistema semántico estará determinado sobre este lenguaje cuando se defina, en el conjunto de los semi-modelos, un sub-conjunto (eventualmente impropio) que será llamado el conjunto de los *modelos*, no siendo necesariamente efectiva la determinación del conjunto de los modelos. El rango de una fórmula será el conjunto de los modelos en los cuales es válida. Una fórmula será llamada lógicamente verdadera en un sistema semántico si es válida en todos los modelos de este sistema.

La noción de modelo generaliza el concepto de descripción de estado que no estaba definido más que para tipos de lenguaje muy particulares: una descripción de estado es la traducción en el lenguaje objeto de un modelo cuyo dominio se identifica con el conjunto de los designata de las constantes individuales. De ello se sigue que, razonando sobre los modelos, se pueden volver a encontrar los métodos utilizados por **Carnap.**

Sea L un sistema semántico, M_n el conjunto de sus modelos con n elementos (siendo n finito). **Kemeny** ha determinado las condiciones en las que M_n es finito y no vacío para casi todos los valores de n: es necesario y suficiente que el número de las constantes descriptivas sea finito, que sean todas de tipo finito, que el sistema sea coherente y que no comprenda ningún axioma de infinito, no exigiendo las condiciones semánticas que el dominio de las variables individuales sea infinito. Se pueden suponer satisfechas estas condiciones en los sistemas que emplean exclusivamente un lenguaje de observación. Es entonces posible determinar una medida estricta m_n sobre M_n y prolongarla a las partes de M_n. Si se decide atribuir a toda fórmula la medida de su rango a título de medida propia, se puede definir entonces un grado de confirmación poniendo $c_n(h, e) = \dfrac{m_n(h \,\&\, e)}{m_n(e)}$. Se podrá entonces establecer $c_\infty(h, e) = \lim_{n \to \infty} c(h, e)$.

Evidentemente, medida y grado de confirmación no se definen más que una vez fijado el cardinal de los modelos considerados. Esta última observación nos autoriza a considerar la medida de una fórmula α como una función m que, para todo entero n, toma como valor $m_n(\alpha)$ y que, naturalmente, estará definida para casi todos los enteros. Se pueden, así, ordenar estas medidas de la manera siguiente. Se establece $m(\alpha) \leqslant m(\beta)$ si y solamente si existe un entero n_0 tal que, para todo n más grande que n_0, $m_n(\alpha)$ y $m_n(\beta)$ estén definidas y se tiene $m_n(\alpha) \leqslant m_n(\beta)$. En este procedimiento, **Kemeny** ve un medio para resolver los problemas planteados por la probabilidad de las leyes universales: si α es una fórmula lógicamente falsa, se tiene $m_n(\alpha) = 0$ para todo n. En cambio, si β es una ley universal, se tiene $m_n(\beta) > 0$, para

todo n tal que m_n esté definido. Se concluye de ello la estricta desigualdad $m(\alpha) < m(\beta)$. En consecuencia, aunque se tenga $\lim_{n \to \infty} m_n(\beta) = 0$ para toda ley universal β, la probabilidad de una ley universal es más fuerte que la probabilidad de una fórmula lógicamente falsa y puede ser distinguida de ella. El interés de estas consideraciones no es despreciable, pero es forzoso reconocer que podrían encontrar un sitio en el sistema de **Carnap**[12]. No son en modo alguno dependientes de la sustitución de la noción de descripción de estado por el concepto de modelo.

En las páginas precedentes, hemos supuesto que una medida estaba efectivamente determinada sobre el conjunto de los modelos de n elementos. Está claro que esta determinación requiere el uso de condiciones de adecuación; no menos claro resulta que las condiciones de adecuación utilizadas por **Carnap** y expresadas en términos de descripciones de estado se transcriben fácilmente en términos de modelos. Por ejemplo, se exigirá de las funciones de medida que se ajusten, es decir que, para toda fórmula α no general, se tenga $m_n(\alpha) = m_{n \mp 1}(\alpha)$, cualquiera que sea n. Igualmente se pedirá que sean simétricas, lo que supone exigir que dos modelos n isomorfos tengan la misma medida. Se podría igualmente pedir que todos los modelos tengan la misma medida, o bien que se conceda la misma medida a todas las clases de modelos isomorfos. Estas últimas condiciones, acerca de las que sería preciso asegurar que son compatibles con el ajuste de las medidas, permiten determinar totalmente las medidas. Corresponden respectivamente a la función de **Wittgenstein** y a la función m^* estudiadas por **Carnap**, cuya extensión permiten. Utilizando la segunda de estas funciones, **Kemeny** puede enunciar algunos resultados relativos a un lenguaje de segundo orden que contiene dos predicados monádicos de orden 1: P y P', y un predicado monádico de orden 2: Φ.[13] Del mismo modo, demuestra que, en el caso de que se escogiera la función de **Wittgenstein**, pueden realizarse los cálculos suponiendo la identidad del conjunto de los modelos y del conjunto de los semi-modelos[14].

---

[12] Bastaría con tomar en consideración una serie de funciones m_n que se ajusten y establecer $m(\alpha) \leqslant m(\beta)$, si existe un entero n_0 tal que para todo entero n más grande que n_0, se tenga: $m_n(\alpha) \leqslant m_n(\beta)$.

[13] Se tiene, por ejemplo: $c(\Phi(P), \Phi(P')) = 1/2$.

[14] El resultado al que hacemos alusión es, con todo rigor, el siguiente: sea L un sistema semántico cuya fórmula de dependencia es D (es decir que existe una fórmula D, conjunción de las fórmulas que expresan la estructura lógica de las constantes descriptivas de L) y μ_n el número de modelos n de L. Sea L' el sistema semántico sin dependencias, es decir obtenido identificando modelos y semi-modelos y μ'_n el número de estos modelos. Si α es una fórmula, se designará respectivamente por $\mu_n(\alpha)$ el número de modelos n en los que sea verdadera y por $m_n(\alpha)$ y $m'_n(\alpha)$ sus medidas de **Wittgenstein** según se considere como una fórmula de L o de L'. Se tiene inmediatamente:

$$m_n(\alpha) = \frac{\mu_n(\alpha \,\&\, D)}{\mu_n(D)} = \frac{m'(\alpha \,\&\, D)\mu'_n}{m'(D)\mu'_n} = \frac{m'(\alpha \,\&\, D)}{m'(D)}$$

y $c_n(\alpha, \beta) = c_n(\alpha, \beta \,\&\, D)$ (Cf. *L.M.F.*, T. 10, p. 301).

Así podemos constatar que los métodos introducidos por **Kemeny** permiten una efectiva extensión de los procedimientos utilizados por **Carnap** a reserva de una solución satisfactoria del problema de las condiciones de adecuación. Este es el problema que es preciso trata ahora.

2. El problema de las condiciones de adecuación

En *Logical Foundations of Probability* la cuestión de la elección de una medida particular sólo recibía una solución imperfecta. Planteada con toda su agudeza, dicha cuestión no se concebía en toda su amplitud puesto que únicamente se tomaban en consideración lenguajes muy restringidos. En el momento actual, está lejos de estar resuelta y se perciben fácilmente las dificultades, quizá insuperables, sin duda alguna considerables, que encubre. En efecto, los sistemas de condiciones de adecuación requieren poseer simultáneamente propiedades múltiples y difícilmente conciliables:

1.º Deben estar formulados en términos suficientemente generales para poder aplicarse a todos los lenguajes que son tratables por el procedimiento de **Kemeny**. Sin embargo las condiciones que los componen deben estar suficientemente precisadas para poder traducirse en relaciones expresables matemáticamente que deben satisfacer las funciones de medida.

2.º Deben ser suficientemente "fuertes" para determinar, si no una única medida, al menos una clase de medidas bastante restringida. Sin embargo, las condiciones demasiado fuertes tienen el peligro de ser contradictorias y, en esta materia, las pruebas de no contradicción no son tan fáciles como podría creerse.

3.º Estas condiciones deben corresponder a requisitos intuitivos, ser "naturales" y, en la medida en que se pueda, expresar todo lo que nuestra intuición nos permita saber acerca de las funciones de confirmación.

Los sistemas propuestos no poseen todas estas propiedades. **Carnap** es el autor de tres de ellos concernientes a lenguajes particulares. Constituidos por condiciones matemáticamente expresables, concluyen en la determinación de una función única o en la delimitación de una clase muy restringida de funciones admisibles. El primero, presentado en *The continuum of inductive methods* atañe a los lenguajes L^{π}. Su introducción tiene por finalidad mostrar que las condiciones que la intuición legitima bastan para delimitar una familia paramétrica de funciones. De este modo se prueba que la lógica inductiva no se reduce a un formalismo convencional. Correlativamente, **Carnap** se ve llevado a excluir la función c^*, cuyos defectos hemos apreciado. El segundo sistema se refiere a los lenguajes con varias familias de predicados monádicos[15]. El tercero, propuesto en el apéndice de la obra que **Carnap** ha escrito

[15] Cf. *P.R.*, § 26, pp. 973-979.

en colaboración con W. **Stegmüller**[16], no es de hecho sino una versión más completa del segundo. Los lenguajes con familias de predicados monádicos son idénticos a los lenguajes L^{π}, excepto en que los predicados, en número finito, están clasificados en familias. Dichos predicados están sometidos a dependencias. Sea $(P_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ una familia de predicados. Se tendrá: $P_i \wedge P_j = \overline{0}$ (si $i \neq j$) y $\bigvee_{i=1}^{n} P_i = \overline{1}$. Resulta claro que un lenguaje L^{π} puede ser considerado como un lenguaje que comprende una sola familia compuesta de 2^{π} predicados (los predicados Q) o como un lenguaje que comprende π familias de 2 predicados. Según veremos, no es indiferente identificar un lenguaje L_n^{π} con uno u otro de estos lenguajes con familias de predicados. Es evidente el interés de los lenguajes de este tipo, ya evocados en *Logical Foundations of Probability*[17]: las familias de predicados formalizan esas familias de propiedades relacionadas de las que la experiencia nos ofrece numerosos ejemplos (los colores, entre otros). Su introducción dispensaría quizás de introducir en el lenguaje predicados diádicos "comparativos" o funtores numéricos[18]. Sirven para dar un sentido a la noción formal de extensión lógica de un predicado sin que haya que tomar en consideración la totalidad de un lenguaje: la extensión lógica de un predicado primitivo es inversa al número de términos de la familia a la que pertenezca; para los predicados derivados, la extensión se calcula por reglas triviales. Consecuentemente, se podrá definir un grado de confirmación que tenga en cuenta la extensión lógica sin exigir la completud de la descripción. Importante resultado, ya prefigurado en los resultados obtenidos en *The continuum of inductive logic*. En fin, del uso de estos lenguajes espera **Carnap** una solución a las dificultades encontradas en el análisis del papel de la analogía.

Aun cuando fueran irreprochables, los sistemas que acabamos de mencionar no resolverían en modo alguno el problema de las condiciones de adecuación pues no se aplican sino a lenguajes muy restringidos. No sucede lo mismo en el sistema de **Kemeny**[19] que concierne a todo lenguaje que satisfaga las condiciones expuestas en *A logical measure fonction.* La importancia de este sistema exige que presentemos su enunciado completo; su brevedad lo permite. Es el siguiente:

CA 1 – c debe ser una función de apuesta coherente (estrictamente).

CA 2 – $c(h, e)$ no debe depender más que de la proposición expresada por h y e.

CA 3 – Constantes lógicamente semejantes deben ser tratadas *a priori* como semejantes.

---

[16] *I.L.W.*, Apéndice 2, pp. 242-252.

[17] *L.F.P.*, cap. 3, § 18, C, pp. 77-78.

[18] Cf. **Carnap** (R.), *P.R.I.* Por ejemplo, se sustituirá el predicado diádico comparativo "más caliente que" por una familia de predicados que expresen diversos grados de calor. Esta familia podría ser utilizada también para evitar la introducción del funtor numérico que pone en correspondencia a todo cuerpo con su temperatura. En realidad, esta solución es muy mediocre.

[19] *C.P.I.*, pp. 720-724.

CA 4 – La definición de c debe capacitarnos para "aprender por la experiencia".

CA 5 – Debemos considerar sólo la parte de e relevante para h.

Presentado explícitamente como una simple generalización de los precedentes, este sistema tiene el mérito de su extrema generalidad, pero a costa de su imprecisión. No podríamos contentarnos con él. Las condiciones que reúne se sitúan en planos muy diferentes. Algunas –es el caso de la primera– se traducen inmediatamente a condiciones matemáticas que debe satisfacer la función c. Otras –especialmente la quinta– permiten tal libertad de interpretación que debe considerárselas como principios reguladores de la elección de las condiciones de adecuación más bien que como condiciones de adecuación propiamente dichas. En consecuencia, es importante darles una formulación más estricta que muestre cómo pueden ser aplicadas a los diversos tipos de lenguaje que conciernen al método de **Kemeny**. Estudiaremos estas condiciones no en el orden en que son presentadas por **Kemeny**, sino comenzando por aquéllas cuyo enunciado suscita menos problemas.

La primera condición vuelve a imponer que la función c sea una función de probabilidad y se encuentre en todos los sistemas[20]. La única cuestión pendiente acerca de ella es saber si se puede exigir que c sea estrictamente coherente. Esta exigencia no se cumple necesariamente si el conjunto de los modelos n de los sistemas semánticos considerados tienen una potencia superior al enumerable; por el contrario, puede ser satisfecha si es finito y, para que lo sea, basta con que se cumplan las condiciones expuestas en el parágrafo precedente. Naturalmente se establecerá $c_\infty = \lim_{n\to\infty} c_n$; pero es preciso indicar que c_∞ no es una medida coherente y que no ha sido propuesta ninguna medida directamente definida sobre los modelos de potencia enumerable. De lo que se deduce que sólo podrán ser estrictamente coherentes las funciones c_n.

La cuarta condición no presenta ninguna dificultad: su función esencialmente negativa es eliminar ciertas medidas que no den cuenta del "learning from experiment". Invocada por **Carnap** para excluir la función de **Wittgenstein**, volveremos a encontrar una formulación restringida de ella en otros sistemas[21]. Pero es fácil darle una formulación tan general, pero más estricta que la de **Kemeny**. Sea P un predicado con n argumentos de tipo finito. Designemos por b, b_1, ..., b_s, n-tuplos de constantes de tal tipo que puedan ser argumentos de P y diferentes entre sí. El conjunto b_1, ..., b_s constituye una muestra de s términos relativa a P. Se denomina distribución estadística relativa a una muestra y a P a una fórmula que indica simplemente cuántos términos de la muestra son P.[22] Sea la muestra compuesta de b_1, ..., b_s.

[20] En *L.F.P.*, se la encuentra de nuevo bajo la forma de C. 53-1 a 3 (pp. 285-287); en *C.I.M.*, bajo la forma de A. 1 a 5 (§ 4); en *P.R.*, de A. 1 a 6; en *I.L.W.*, de NA. 1 a 6 (p. 242).

[21] Sin ser explícitamente enunciada, se utiliza en *L.F.P.* (Ap., § 110, p. 565); en *C.I.M.*, A. 10 se da una versión deformada. A. 12 en *P.R.*, y N.A. 12 en *I.L.W.*, la expresan con claridad.

[22] Se enuncia naturalmente en forma de una disyunción de conjunciones de fórmulas fundamentales.

Designemos por s_p el número de constantes que son P en esta muestra y por $D(s_p, s)$ la distribución relativa a esta muestra. La condición en cuestión es la siguiente: $c(Pb, D(s_p, s))$ debe ser función estrictamente creciente de s_p si s es constante, suponiendo que las fórmulas "Pb", "Pb_1", ... "Pb_s" sean lógicamente independientes y, por tanto, no estén lógicamente determinadas.

Se aprecia que el enunciado de esta condición no presenta ninguna dificultad para predicados de cualquier tipo; no sólo se excluye la función de **Wittgenstein** sino también todas las funciones llamadas "inversas", que llevan a conceder a "Pb" una probabilidad creciente cuando s_p decrece, siendo s constante.

Al contrario de las dos precedentes, la tercera condición, que concierne a la simetría, es difícil de enunciar en forma general. Sin embargo, se puede simplificar un poco el problema que plantea su enunciación tomando en consideración las funciones m y no las funciones c que derivan de ella.

Es preciso indicar ante todo que esta condición, aplicada bajo una forma restringida, a saber, enunciada solamente para las constantes individuales, aparecía en *Logical Foundations of probability*. Su formulación era entonces la siguiente: "descripciones de estado isomorfas tienen medidas iguales" y su introducción exigía que se limitara únicamente a las funciones c simétricas, en el sentido de **Carnap**. Pero es claro que esta formulación es mucho más restrictiva, puesto que la condición de **Kemeny** atañe no sólo a las constantes individuales, sino a todo el conjunto de constantes "lógicamente semejantes". En *The continuum of inductive methods*, se puede encontrar otro empleo de esta condición en la medida en que **Carnap** impone que las funciones c sean invariantes en una permutación de predicados Q.[23] El interés de esta condición es evidente: **Kemeny** ha señalado que, en los sistemas L_n^π, junto con la condición de ajuste (en la cual se puede ver una expresión particularizada de C.A. 2), basta para limitar el conjunto de funciones c a una familia que dependa de un solo parámetro[24]. Pero debemos ir más allá del recuento de los empleos particulares de la condición de simetría para determinar una formulación general de ella.

Comencemos por el caso más sencillo, el de los sistemas semánticos cuyas constantes descriptivas no tienen estructura lógica, es decir, los sistemas en los que el conjunto de los modelos es idéntico al conjunto de los semi-modelos. En tal caso, todas las constantes del mismo tipo pueden estimarse como lógicamente semejantes. La condición se enuncia entonces con facilidad. Sea C el conjunto de las constantes; σ, una permutación de C tal que la imagen de toda constante sea una constante del mismo tipo. Llamemos transformación conforme a una permutación de este género. Es evidente que toda transformación conforme σ puede ser prolongada en una permutación de las fórmulas, de los semi-modelos n y, por tanto, de los mo-

[23] Cf. *C.I.M.*, § 4, A. 8. Hagamos notar que la condición mantenida es equivalente a la invarianza en toda permutación de los predicados fundamentales.
[24] Cf. *C.I.L.*

delos n. Sea μ_n un modelo n y σ una transformación conforme; la condición de simetría exige que, para toda medida m_n, se tenga: $m_n(\mu_n) = m_n(\sigma(\mu_n))$. Puesto que el número de los tipos de variables o de constantes es finito, podríamos limitarnos a la consideración de las transformaciones conformes que dejan invariantes todas las constantes, excluidas las de un tipo determinado. Se pueden denominar transformaciones conformes *elementales* las transformaciones de este tipo. Toda transformación conforme puede obtenerse por composición de transformaciones elementales.

El caso de los sistemas semánticos cuyas constantes no son independientes sino que poseen una estructura lógica es mucho más complejo. Los problemas que plantean se resolverían si se pudiera utilizar un procedimiento canónico para eliminar las dependencias; dicho de otro modo, si se pudiera definir una medida simétrica en relación a un sistema dependiente a partir de una medida simétrica relativa al sistema obtenido suprimiendo todas las dependencias. Se ha propuesto un método de este tipo. Es importante exponerlo y mostrar por qué razones nos parece inaceptable.

Sea L un sistema semántico con dependencias –es decir, tal que el conjunto de los modelos sea distinto del conjunto de los semi-modelos. L', el sistema obtenido suprimiendo las dependencias, es decir, identificando los modelos con los semi-modelos. Se aplicará a L' la condición de simetría. Sea m'_n una medida definida sobre los modelos n de L' y que satisface esta condición. Una medida sobre L se deducirá estableciendo $m_n(\mu_n) = 0$ para todo semi-modelo n μ_n que no sea un modelo de L y reglamentando m_n. Se tendrá a m_n por una medida simétrica. En el caso en que las dependencias se expresen en forma de un conjunto finito de fórmulas –los postulados de significación– que son verdaderas en los modelos de L y solamente en ellos, se obtiene el siguiente resultado: sea D la conjunción de los postulados de significación de L que denominaremos fórmula de dependencia de L. Una medida n, m_n, definida en relación a L será considerada simétrica si se obtiene a partir de una medida n m'_n simétrica relativamente a L', estableciendo para todo modelo $n\mu_n$ de L: $m_n(\mu_n) = m'_n(\mu_n)/m'_n(D)$. A partir de ello se deduce con facilidad el siguiente resultado: si c_n y c'_n son respectivamente las funciones de confirmación derivadas de las medidas m_n y m'_n, se tiene: $c_n(h, e) = c'_n(h, e \,\&\, D)$.

El método propuesto está, pues, en la lógica del procedimiento inventado por **Kemeny** y **Bar-Hillel** cuando, a fin de extender el sistema de *Logical foundations of probability* eliminando la condición de independencia de las fórmulas atómicas, proponían sencillamente "suprimir las descripciones de estado contradictorias" en la determinación de las medidas. Vuelve, como hará notar el propio **Carnap**[25], a tratar los postulados de significación como simples enunciados que pertenecen a la evidencia. A fin de precisar la naturaleza de este método, expongamos un ejemplo de su aplicación. Sea un sistema de orden 1 que contenga constantes individuales, y dos predicados diádicos R_1 y R_2. R_1 no tiene estructura lógica. R_2 es una relación

[25] *M.N.*, pp. 228-229.

de equivalencia. Es evidente que si toda permutación de las constantes individuales puede ser prolongada en una biyección de los modelos, nos ocurre lo mismo con la inversión de los predicados. El procedimiento del que hablamos llevaría, en el caso presente, a razonar así: sea L' el sistema obtenido a partir de L suprimiendo las dependencias, es decir, suponiendo a R_2 sin estructura lógica; sea σ la inversión de R_1 y de R_2 y μ_n un modelo n de L'; la condición de simetría impondrá para toda medida m'_n: $m'_n(\mu_n) = m'_n(\sigma(\mu_n))$. Eventualmente se podrá determinar plenamente m'_n con la ayuda de las otras condiciones de adecuación. En todo caso, no se considerarán simétricas más que las medidas n relativas a L que deriven de medidas m'_n que satisfacen, además de las otras condiciones de adecuación, la condición precedente. Esto supone escoger una medida simétrica en la inversión de dos predicados, deducir de ella un grado de confirmación c'_n relativo a L' y definir el grado de confirmación relativo a L estableciendo $c_n(h, e) = c'_n(h, e \,\&\, D)$, siendo D una fórmula que exprese el hecho de que R_2 es una relación de equivalencia.

En suma, en un primer momento, se consideran semejantes constantes del mismo tipo pero de estructuras lógicas diferentes, se aplica la condición de simetría, se determina así la medida mantenida, o al menos se le exige satisfacer ciertas relaciones, y posteriormente se reintroduce la diferencia de estructura lógica anulando sencillamente la medida de los semi-modelos que no son modelos. El procedimiento es, por lo menos, discutible, si no incoherente. Viene a considerar como semejantes constantes que no lo son, a identificar, según la propia opinión de **Carnap**, postulados de significación y simples relaciones empíricas. En una palabra, implica una confusión de verdades lógicas y verdades de hecho. Esto basta para desacreditarlo.

Por eso propondremos otro método para tratar el caso de los sistemas dependientes. La condición de simetría no puede aplicarse más que a constantes "lógicamente semejantes"; no pueden ser consideradas lógicamente semejantes sino constantes del mismo tipo sometidas a dependencias análogas. En términos precisos, las constantes son lógicamente semejantes si su permutación puede ser prolongada en una biyección de los modelos. Se llega así a un claro enunciado de la condición de simetría: en el caso de los sistemas dependientes no serán consideradas como transformaciones conformes más que las permutaciones de constantes que definan una biyección de los modelos. Así, en el ejemplo antes expuesto, si toda permutación de las constantes individuales es conforme, la inversión de R_1 y de R_2 no lo es. Sea L un sistema semántico, σ una transformación conforme, en el nuevo sentido del término; m_n, una medida n y μ_n un modelo n. La condición de simetría exige que m_n satisfaga la relación siguiente: $m_n(\mu_n) = m_n(\sigma(\mu_n))$. En el caso en que exista una fórmula de dependencia D, es fácil definir, en el conjunto de las permutaciones de constantes, el sub-conjunto de las transformaciones conformes: son aquéllas que aplican toda constante sobre una constante del mismo tipo y con respecto a las cuales D es simétrica, es decir, aquéllas en las que se tenga $\vdash D = \sigma(D)$.

Hemos propuesto dos enunciados distintos de la condición de simetría para el caso de sistemas dependientes. El primero, que hemos criticado, descansa sobre un

método canónico para "eliminar las dependencias"; el segundo, que acabamos de exponer, sobre el rechazo a considerar como "lógicamente semejantes" constantes que no lo son. Es evidente que el segundo enunciado es compatible con el primero, pero es más débil. Por las razones dichas, nos parece razonable atenernos, en lo que atañe a la condición de simetría, a la versión débil que hemos propuesto. Además, es a ella a la que nos referimos implícitamente cuando aplicamos la condición de simetría a sistemas semánticos particulares. Así, en el sistema de axiomas construido por **Carnap** y relativo a los lenguajes con varias familias de predicados, se encuentran los siguientes axiomas: el grado de confirmación es invariante en toda permutación finita de las constantes individuales; lo es igualmente en toda permutación de los predicados de una misma familia y en toda biyección de una familia de predicados en otra familia que comprenda el mismo número de predicados[26]. Es evidente que estas transformaciones son conformes, tomando este término en el sentido restringido que acabamos de darle. Por el contrario, ningún axioma concierne a las inyecciones de una familia *en* otra familia que comprenda un número más grande de predicados, lo que correspondería al caso de las transformaciones no conformes. El enunciado que hemos mantenido está, pues, de acuerdo con los usos admitidos: tiene por única función dar una formulación neta de los principios sobre los que se apoyan.

Se recuerda que los valores de la función c^* de *Logical Foundations of Probability* dependen del número de predicados del lenguaje y que, en consecuencia, su uso exige que se satisfaga la condición de completud de la descripción. La segunda condición formulada por **Kemeny** pretende excluir las funciones de este tipo y liberar la aplicación de la teoría de la confirmación de una exigencia desorbitada.

Hagamos notar, ante todo, que sólo se refiere a las fórmulas no generales: la adición de constantes individuales modifica el contenido de una fórmula que comporta cuantificaciones de variables individuales[27]. Sucede lo mismo en la adición de elementos a un modelo finito y la misma observación puede hacerse en lo que concierne a las cuantificaciones que versan sobre variables de otro tipo. Excluiremos, pues, a las fórmulas que contienen cuantificadores del campo de aplicación de esta condición. Conviene añadir que es preferible aplicarla a las funciones de medida más bien que a los grados de confirmación.

Si se refiriera únicamente a las constantes individuales, la condición en cuestión sería equivalente al ajuste de funciones m requerido por **Carnap**. Efectivamente, en *The continuum of inductive methods*, el ajuste se deriva de un enunciado restringido de C.A. 2,[28] y ocurre lo mismo en los sistemas de axiomas relativos a los lengua-

---

[26] *P.R.*, p. 975, A. 7 a 9 y *W.I.L.*, pp. 243-244, Na. 7 a 9.

[27] En un lenguaje que no contenga más que a a y b como constantes individuales, "$(x)Px$" es equivalente a "Pa & Pb". Si se añade c como nueva constante, "$(x)Px$)" es equivalente a "Pa & Pb & Pc". Se supone naturalmente que las variables describen el conjunto de las constantes del mismo tipo.

[28] *C.I.M.*, § 4, A. 6.

jes con familias de predicados[29]. Pero es importante encontrar una formulación más general. En tanto no se consideren más que los sistemas sin dependencias, el problema se resuelve sin dificultad: sea L un sistema semántico independiente; h, una fórmula de L; L', el sistema restringido únicamente a las constantes descriptivas que están mencionadas de modo esencial en h; $m_n(h)$ y $m'_n(h)$ las medidas n de h en L y en L'; se debe tener $m_n(h) = m'_n(h)$, y, por aplicación de la condición a las constantes individuales, $m'_n(h)$ debe ser independiente de n.

En cuanto a los sistemas dependientes, el problema es más complejo. Es evidente que no se puede determinar la medida de h restringiendo el lenguaje sólo a las constantes de h, sino que también se debe introducir en él todas las constantes que se le vinculan en virtud de dependencias. Queda por saber qué se entiende cuando se habla de "constantes vinculadas a las constantes de h en virtud de dependencias". Propondremos la siguiente definición: son todas aquéllas que figuran esencialmente en las fórmulas válidas en los modelos de h pero no lógicamente verdaderas. En el caso en que exista una fórmula de dependencia D, estas fórmulas son las que se deducen de D y de h, pero no sólo de D.

Tomemos un ejemplo: el de los lenguajes que comprenden familias de predicados monádicos. En tal caso, el hecho de que los predicados $P_1^i, \ldots P_k^i$ constituyan una familia se expresa por las fórmulas de dependencias $\bigvee_{j=1}^{k} P_j^i = \overline{1}$ y $\sim (P_n^i \ \& \ P_m^i) = \overline{0}$ (con $m \neq n$ y m y n comprendidos entre 1 y k).

Sea h la fórmula "$P_1^1 a$". De h y de las fórmulas de dependencia se deducen, por ejemplo, las fórmulas "$\sim P_n^i a$", para todo n con $1 < n \leqslant k$, que no son L-verdaderas. De ello se sigue que todos los predicados que pertenecen a la misma familia están vinculados a P_1^1.

En cambio, si existen otras familias, los predicados que las constituyen no están vinculados a P_1^1. En consecuencia, para determinar $m(h)$, se puede restringir el lenguaje a la sola constante individual "a" y a una única familia de predicados. Así, **Carnap** llega a proponer el siguiente axioma: "$c(h, e)$ es independiente de la existencia de familias distintas de las que figuran en h o e"[30].

La última de las condiciones de **Kemeny** es la que inspira menos confianza. Es extraño servirse del concepto de relevancia en la determinación de una función de confirmación, cuando uno de los objetivos de la lógica inductiva es dar un sentido preciso a este concepto intuitivo[31]. Por lo demás, **Kemeny** lo reconoce: "The condition is pratically beggin the issue"[32]. De todas formas, esta condición puede

[29] *P.R.*, p. 975, A. 10 y *W.I.L.*, p. 244, NA. 10.
[30] *P.R.*, p. 975, A. 11 y *W.I.L.*, p. 244, NA 11.
[31] **Carnap** consagra un capítulo entero de *Logical foundations of probability* –el 6.º– a definir la relevancia a partir de los valores del grado de confirmación.
[32] *C.P.I.*, p. 723.

ser eficaz si sirve, como quiere **Carnap**[33], para excluir los datos manifiestamente irrelevantes. Pero es difícil ofrecer un enunciado riguroso de ella y muchos de sus usos son sospechosos. Por ejemplo, parece que se utiliza en el caso siguiente: en un lenguaje L^{π}, si M es un predicado, e_M la distribución estadística de una muestra relativa a la división $\{M, \sim M\}$; e_Q, la distribución Q estadística correspondiente a e_M y h una fórmula de la forma "Ma", no figurando "a" en la muestra, se tiene $c(h, e_M) = c(h, e_Q)$. Aparentemente el razonamiento es el siguiente: la repartición de los objetos de la muestra entre los diversos predicados Q no es relevante para la estimación del grado de confirmación de h. He ahí un uso sospechoso de la condición de **Kemeny** puesto que vuelve a excluir la variedad de casos de los factores relevantes.

De ahí derivan también las dificultades encontradas de nuevo a propósito del razonamiento por analogía. Como quiera que sea, es evidente que la formulación de esta última condición no puede ser elevada al mismo nivel de rigor que las precedentes.

3. Modificaciones y extensiones efectivas de la lógica inductiva

Retomando el problema de las condiciones de adecuación, problema abordado desde el principio de esta obra, hemos llegado en la mayoría de los casos a ofrecer, de las condiciones de **Kemeny**, una formulación más estricta que la que tienen en su autor. Nos queda por ver el uso que puede hacerse de ellas. En realidad, los sistemas de axiomas que hemos tratado en el parágrafo precedente no son más que aplicaciones implícitas, en lenguajes particulares, del sistema general de **Kemeny**. Su objetivo es modificar y, eventualmente extender, los resultados obtenidos en *Logical foundations of probability*. Su interés reside en que su uso permite establecer que, en ciertos casos, la clase de los grados de confirmación admisibles se reduce a una función dependiente de uno o dos parámetros.

Cuando **Carnap**, en *The continuum of inductive methods*, presenta el primero de esos sistemas, que concierne sólo a los lenguajes L^{π}, su intención es la siguiente: por una parte, justificar mejor la elección de una función de confirmación y, por otra parte, evitar que se mantengan funciones que, al igual que la función c^*, supongan la completud de la descripción. Antes de exponer este sistema, precisemos que si e_Q designa una distribución individual relativa al conjunto de los predicados Q, e_i la distribución correspondiente relativa a la división $\{Q_i, \sim Q_i\}$ y e_M la distribución individual relativa a la división $\{M, \sim M\}$ (siendo M un predicado cualquiera), las distribuciones estadísticas obtenidas a partir de e_Q, e_i, e_M, serán designadas respectivamente por e'_Q, e'_i, e'_M. h y h_M designarán fórmulas del tipo "$Q_i a$" y "Ma", no perteneciendo a a la muestra considerada en el segundo argumento de las funciones c.

[33] *P.R.*, p. 976.

Los ocho primeros axiomas mantenidos por **Carnap** son los siguientes: De A1 a A5 enuncian que $c(h, e)$ es invariante en las sustituciones de fórmulas L-equivalentes y reposa sobre una medida estricta. Son consecuencias inmediatas de CA 1. A6 es un equivalente de la condición de ajuste: "$c(h_i, e_i)$ tiene el mismo valor en todo L_n^π, cualquiera que sea n". Es una consecuencia inmediata de CA 2 aplicada a las constantes individuales. A7 y A8 son aplicaciones de CA 3: A7 aplica la condición de simetría a las constantes individuales: "$c(h, e) = c(\sigma(h), \sigma(e))$ si σ es una permutación de las constantes individuales de L_n^π". A8 es la misma condición relativa a los predicados Q: "sea τ una permutación de dos predicados Q, se tiene $c(h, e) = c(\tau(h), \tau(e))$". (Es evidente que la restricción a los casos de permutaciones de dos predicados no es en modo alguno esencial; basta una cadena de tales permutaciones para que se obtenga una permutación general del conjunto de los predicados.)

Por aplicación de A7 a las permutaciones restringidas al conjunto de las constantes mencionadas en la muestra, se establecerá $c(h_M, e_M) = c(h_M, e'_M)$.[34] En particulas, se tiene $c(h_i, e_i) = c(h_i, e'_i)$. En virtud del axioma A8, está claro que $c(h_i, e'_i)$ no puede depender del predicado Q considerado; únicamente dependerá, pues, del tamaño s de la muestra, del número s_i de sus elementos que sean Q_i y, eventualmente, de k, número de predicados Q.

Ahora bien, un nuevo axioma, inspirado en la última condición de **Kemeny**, indica que, en la probabilidad de h_M, sólo es relevante el número de elementos de la muestra que son M, y no su repartición entre los diversos predicados Q incluidos en M.[35] Por medio de razonamientos triviales, se demuestra que c está completamente determinada desde el momento en que lo está para las parejas de la forma $\langle h_1, e_i \rangle$.

---

[34] En efecto e'_M es equivalente a la disyunción de las distribuciones individuales incompatibles $e_1, e_2 \ldots e_p$, obtenidas unas a partir de otras por permutación de las constantes de la muestra. Para dos de estas distribuciones se puede escribir, en virtud de A. 7: $c(h_M, e_j) = c(h_M, e_k)$. Además se tiene:

$$
\begin{aligned}
c(h_M, e'_M) &= c(h_M, (e_1 \vee \ldots \vee e_p)) \\
&= c((h_M \,\&\, (e_1 \vee \ldots \vee e_p)), (e_1 \vee \ldots \vee e_p)) \\
&= \sum_{j=1}^{p} c((h_M \,\&\, e_j), (e_1 \vee \ldots \vee e_p)) \\
&= \sum_{j=1}^{p} c(h_M, (e_j \,\&\, (e_1 \vee \ldots \vee e_p))) \cdot c(e_j, (e_1 \vee \ldots \vee e_p)) \\
&= \sum_{j=1}^{p} (c(h_M, e_j) \cdot c(e_j, (e_1 \vee \ldots \vee e_p))) \\
&= c(h_M, e_j) \cdot \sum_{j=1}^{p} c(e_j, (e_1 \vee \ldots \vee e_p)) \\
&= c(h_M, e_j)
\end{aligned}
$$

[35] Se enuncia así: $c(h_M, e_Q) = c(h_M, e_M)$.

Es decir, basta elegir una función g de s, s_i y k, para poder determinar c. Se establecerá $c(h_i, e_i) = g(s, s_i, k)$.

En *The continuum of inductive methods,* la elección de la función c estaba limitada por la introducción de dos axiomas suplementarios: el primero exigía que $g(s, s_i, k)$ perteneciera al intervalo cuyas cotas son s_i/s, frecuencia de los Q_i en la muestra y $1/k$, anchura lógica de Q_i; exigencia aceptable, puesto que no se ve qué factores harían salir de este intervalo cuyas cotas corresponden respectivamente a los valores que se obtendrían no teniendo en cuenta más que el factor experimental o el factor lógico. **Carnap** concluía de ello que se podía escribir:

$$g(s, s_i, k) = \frac{s_i + \lambda(s, s_i, k)/k}{s + \lambda(s, s_i, k)}$$

Siendo λ una función con valores positivos. El segundo axioma imponía que λ no dependiera ni de s ni de s_i. Pero sólo podía aportar una justificación bastante débil de ello apelando al hecho de que s y s_i intervienen ya en la definición de g, y que no es, por tanto, necesario que λ dependa de ellos.

En la recensión de esa obra[36], **Kemeny** proclamaba la inutilidad de los dos últimos axiomas, que pueden deducirse de los nueve primeros. Resultado extremadamente importante porque prueba que las conclusiones obtenidas por **Carnap** pueden establecerse apelando sólo a los axiomas que son aplicaciones inmediatas de las condiciones de adecuación. La demostración no se publicará sino posteriormente[37]. Será entonces presentada bajo una forma que no concierne directamente a los sistemas L^π sino a los lenguajes de una sola familia de predicados e, incluso, en el primero de los textos citados en referencia, sólo se toma en consideración el caso en que esta familia comprende seis predicados[38].

En realidad, estas divergencias no tienen importancia: no hay ninguna razón para limitarse al caso de los lenguajes L^π que pueden ser considerados como un tipo particular de lenguajes con una sola familia de predicados. Para convencerse de ello, basta constatar que los predicados Q constituyen una familia y que los axiomas relativos a los lenguajes con familias de predicados son análogos al sistema propuesto en *The continuum of inductive methods*[39]. El único carácter que distingue a los len-

---

[36] Cf. *C.R.C.*

[37] Cf. *C.P.I.*, pp. 725-729 y *W.I.L.*, pp. 247-249, en donde se reproduce esta demostración.

[38] Naturalmente, los predicados representan los resultados posibles al tirar un dado. El ejemplo está elegido para mostrar que los métodos examinados pueden aplicarse a problemas clásicos de la teoría de probabilidades.

[39] En *P.R.* y *W.I.L.*, a A., 1 a 5, de *C.I.M.* corresponden A (o NA), 1 a 6 (enunciando el 6.º axioma el carácter estricto de la medida); a A. 6 corresponde A. 11; A. 7 conserva su número. Igualmente, A. 8 (pero su enunciado se refiere a los predicados de toda familia y no a los predicados Q). Sólo A. 9 (que será A. 14) se enuncia en el primer texto en una forma ligeramente diferente, pero equivalente.

guajes L^{π} es el hecho de que corresponden a lenguajes que comprenden una sola familia compuesta de predicados cuyo número es una potencia de 2.

La demostración de **Kemeny** tiene por objetivo establecer que la función g no depende ni de s, ni de s_i, y que, escrita en la forma anteriormente propuesta, corresponde a una función con valores positivos. Muy sencilla en su concepción, reposa sobre la escritura de algunas relaciones de recurrencia. Imponiendo la simetría que $c(h_i, t) = c(h_j, t)$ para todo i y todo j, como $\sum_{i=1}^{k} c(h_i, t) = 1$, se obtiene en primer lugar $c(h_i, t) = 1/k$ o $g(0, 0, k) = 1/k$. Del mismo modo, siendo e una distribución estadística que atribuye el predicado Q_i a todas las constantes de una muestra de tamaño $s + 1$, se obtiene $\sum_{i=1}^{k} c(h_i, e) = 1$, lo que se escribe: $(1)g(s + 1, s + 1, k) + (k - 1)g(s + 1, 0, k) = 1$. Igualmente, suponiendo que e atribuye Q_i a s constantes y Q_j a una sola, se obtiene, por el mismo razonamiento: $(2)g(s + 1, s, k) - g(s + 1, 1, k) + (k - 2)g(s + 1, 0, k) = 1$. La última ecuación supone que $k > 2$. Sean 2 predicados Q_i y Q_j, e_s, e_{s+1}, $\overline{e}_{s+1}$, e_{s+2} distribuciones individuales de muestras (cuyos tamaños están indicados por los índices) que atribuyen Q_i y Q_j respectivamente a s' y 0, $s' + 1$ y 0, s' y 1, $s' + 1$ y 1 constantes (s' no es diferente de s más que si $k > 2$). Se observa que, con las notaciones precedentes, e_{s+1} es e_s & h_i, $\overline{e}_{s+1}$ es e_s & h_j, e_{s+2} es e_{s+1} & h_j o $\overline{e}_{s+1}$ & h_j.

Escribiendo la fórmula aritmética trivial,

$$\frac{m(e_{s+2})\, m(e_{s+1})}{m(e_{s+1})\, m(e_s)} = \frac{m(e_{s+2})\, m(\overline{e}_{s+1})}{m(\overline{e}_{s+1})\, m(e_s)}$$

se obtiene:

$$g(s + 1, s', k) = \frac{g(s + 1, 0, k)g(s, s', k)}{g(s, 0, k)} \tag{3}$$

Estas tres ecuaciones bastan para determinar g en función de $g(1, 0, k)$. La aplicación reiterada de (3) permite calcular $g(s, s', k)$ en función de $g(s, 0, k)$ y de términos de la forma $g(s', s', k)$. Una expresión de este último tipo está vinculada a una expresión del tipo precedente por (1) y se puede aplicar de nuevo (3). Se demuestra que la única solución de este sistema de ecuación viene dada por: $g(s, s', k) = \dfrac{s' + \lambda(k)/k}{s + \lambda(k)}$, si se establece

$$\lambda(k) = \frac{kg(1, 0, k)}{1 - kg(1, 0, k)} = \frac{kg(1, 0, k)}{g(1, 1, k) - g(1, 0, k)}$$

Además, se establece que λ es una función con valores positivos[40]. Sin embargo, la demostración sólo se alcanza en el caso en que $k > 2$. **Kemeny** afirma que una demostración más compleja daría el mismo resultado para el caso en que $k = 2$.[41] **Carnap** introduce un axioma que amplía a este valor lo establecido demostrativamente para los valores superiores[42]. En esta forma, el axioma es verosímil.

Falta por saber si λ puede depender de k. **Kemeny** no excluye esta posibilidad y, en *The continuum of inductive methods,* los métodos son clasificados en dos especies, según que λ sea una constante o varíe con k. **Carnap** indicaba entonces que la única función de la segunda especie que ha sido estudiada es la función c^* que corresponde a la elección $\lambda(k) = k$. De hecho, nos parece que se tiene derecho a exigir la exclusión de las funciones de la segunda especie. **Carnap** hace notar que en los métodos de la segunda especie $c(h_M, e_M)$ dependen del número de predicados del lenguaje[43]. Es decir, violan la segunda condición de **Kemeny** de la que, por otra parte, se puede derivar con facilidad la constancia de λ. Sea un lenguaje L^π, del que P es un predicado primitivo. Se demuestra que $c(h_p, s_p) = \dfrac{s_p + \lambda(2^\pi)2^{\pi-1}/2}{s + \lambda(2^\pi)}$. Pero, en virtud de CA 2, se podría calcular $c(h_p, e_p)$ restringiendo el lenguaje únicamente al predicado primitivo P; se tendría entonces $c(h, s) = \dfrac{s_p + \lambda\ (2)/2}{s + \lambda(2)}$. Esto impone $\lambda(2) = \lambda(2^\pi)$. De modo análogo, sea un lenguaje que comprenda una única familia de n predicados, y n' un divisor de n. Supongamos a los predicados agrupados por sub-familias de predicados n'; tomando la disyunción de cada una de estas sub-familias, se obtiene un lenguaje con una familia de n/n' predicados sobre el que se puede definir un grado de confirmación, aplicándole los mismos axiomas que anteriormente. Sea P un predicado de este segundo lenguaje. Para calcular $c(h_p, e_p)$ se puede considerar a P bien como un predicado derivado del primer lenguaje, bien como un predicado primitivo del segundo. Del hecho de que se debe obtener el mismo valor en los dos casos, se concluye que $\lambda(n) = \lambda(n/n')$.[44]

La exclusión de los métodos de la segunda especie parece, pues, legítima. Por lo

---

[40] Se demuestra con facilidad que la cuarta condición de **Kemeny** no se satisfaría si se actuara de otro modo. De ahí la inclusión en los sistemas de *P.R.* y *W.I.L.* de un axioma (A. 12) que no es más que una formulación de esta condición.

[41] *C.P.I.,* p. 729. Lo problemático en el caso en que $k = 2$ es la ecuación (3), que no se puede escribir.

[42] *P.R.,* p. 975; A. 15 y *W.I.L.,* p. 249, NA. 15: "Para un s dado, $g(s, s', 2)$ es función lineal de s'".

[43] Cf. *C.I.M.,* § 16.

[44] En efecto, se debe tener, cualquiera que sea s_p y s:

$$\frac{s_p + \lambda(n) \cdot n'/n}{s + \lambda(n)} = \frac{s_p + \lambda(n/n') \cdot 1/(n/n')}{s + \lambda(n/n')}$$

demás,el interés se concentra sobre el estudio de los métodos de la primera especie, que se presentan como un continuo dado que el parámetro λ varía en el intervalo $[0, +\infty]$. Las investigaciones de **Carnap** han conducido, por una parte, a eliminar los métodos "extremos", que corresponden a los valores de λ que son las cotas del intervalo de variación; y, por otra parte, a poner en evidencia la significación intuitiva de λ. La determinación $\lambda = 0$ corresponde a la estimación retenida por **Reichenbach**: $c(h_M, e_M) = s_M/s$; pero tal función debe excluirse pues no es estrictamente coherente: basta con que $s_M = s$, cualquiera que sea s, para que $c(h_M, e_M) = 1$.[45] Asimismo, la función determinada por $\lambda = 0$, que no es otra que la función de **Wittgenstein**, no puede mantenerse, pues no es un "auténtico método inductivo"[46]. Siendo esto así, $\lambda = 2$ corresponde a la regla de **Laplace** modificada para tomar en cuenta la extensión lógica de los predicados y evitar las inconsistencias a las que llevaba su omisión[47]. Supongamos ahora que una ley universal ha recibido un número determinado de verificaciones. Se constata que su grado de confirmación especificado decrece cuando crece λ.[48] Por eso, se ha podido ver en λ un "índice de prudencia" que se elegirá tanto más grande cuanto, en la estimación de las probabilidades, menos peso se otorgue a las lecciones de la experiencia, que es, por naturaleza, limitada. Pero, en este asunto, la extrema prudencia consistiría en escoger $\lambda = \infty$ y, por tanto, no tomar en cuenta datos experimentales.

Es indiscutible que los resultados obtenidos son importantes: las condiciones de adecuación impuestas al grado de confirmación tienen consecuencias mucho más fuertes que las que un rápido examen permite apreciar. En los lenguajes que no comprenden más que una familia de predicados –entre los que figura el lenguaje L^{π}– c está determinado aproximadamente a un parámetro. Si nos limitamos a las funciones de la primera especie, como parece deseable hacerlo, no se exige la completud de la descripción. Sin embargo, subsisten ciertos defectos del método c^*. En virtud de las elecciones que se han hecho, muy especialmente del axioma A9, no se toma en cuenta la variedad de los elementos de la muestra. Asimismo, es fácil demostrar que subsisten las dificultades que hemos subrayado en el tema de la analogía. Por último, sólo se han tratado las cuestiones relativas a los lenguajes que no comprenden sino una familia de predicados.

Trabajos relativamente recientes de **Carnap** tratan cuestiones relativas a lenguajes con varias familias de predicados.

Admitido, por una parte, que para determinar la medida de una fórmula se puede restringir el lenguaje a las familias de predicados cuyos representantes figuran en la fórmula y admitida, por otra parte, la invarianza de la medida de una fórmula

[45] *C.I.M.*, § 14.
[46] *C.I.M.*, § 15 y **Kemeny** (J. G.): *C.I.P.*, pp. 729-730.
[47] *C.I.M.*, § 12.
[48] Naturalmente, si la ley afirma que un predicado de anchura lógica relativa ω/k es un predicado universal y si ha recibido s confirmaciones, su grado de confirmación especificado es $\dfrac{s + \lambda \cdot \omega/k}{s + \lambda}$.

cuando se permutan dos familias que comprenden el mismo número de predicados[49], queda por determinar la medida de las fórmulas que comprenden predicados de familias distintas.

Limitémonos, como lo hace **Carnap**, al caso de dos familias de k_1 y de k_2 predicados respectivamente: $P_1^1, \ldots, P_{k_1}^1$ y $P_1^2, \ldots P_{k_2}^2$. Sea e la distribución estadística de una muestra en relación con una y otra de estas familias. ¿Cómo determinaremos la medida de e? Un primer método consistiría en definir, a partir de las dos familias, una seudo-familia compuesta de predicados complejos, análogos a los predicados Q: P_1^1 y P_1^2, P_1^1 y P_2^2, etc..., que comprenderá naturalmente $k_1 \cdot k_2$ elementos. Se determinará entonces la medida de e procediendo como si esta seudo-familia fuera una auténtica familia. Designemos por m' la medida así obtenida, que está plenamente determinada desde que se ha escogido un valor de λ. El segundo método es el siguiente: e puede escribirse con la fórmula "e_1 & e_2", siendo e_1 y e_2 respectivamente la distribución de la muestra en relación con la primera y con la segunda familia[50]. Se elegirá m, y en cada uno de los dos lenguajes restringidos a una sola familia de predicados, se determinará $m(e_1)$ y $m(e_2)$. Se obtendrá una medida de e, que designaremos por $\overline{m}$ estableciendo simplemente: $\overline{m}(e) = m(e_1) \cdot m(e_2)$. **Carnap** muestra que son imperfectas cada una de estas dos medidas[51]. Por eso propone el recurso a una ponderación. Se establecerá, siendo η un número perteneciente a [0, 1]:

$$m(e) = \eta \overline{m}(e) + (1 - \eta) m'(e).$$

---

[49] Estas dos condiciones, que figuran bajo las rúbricas NA. 11 y NA. 9 en *W.I.L.* (p. 144) resultan respectivamente de CA. 2 y CA. 3.

[50] Por ejemplo, si la muestra comprende a y b, siendo e"P_2^1a & P_3^2a & P_3^2b", e_1 será "P_2^1a & P_1^1b" y e_2 será "P_3^2a & P_3^2b". El paso de estas distribuciones individuales a las distribuciones estadísticas es obvio.

[51] Consideremos un lenguaje que comprenda 2 familias de 2 predicados cada una y las distribuciones estadísticas de una muestra de 20 elementos resumidos en los cuadros siguientes:

A:

	P_1^1	P_2^1
P_1^2	5	5
P_2^2	5	5

B:

	P_1^1	P_2^1
P_1^2	10	0
P_2^2	0	10

C:

	P_1^1	P_2^1
P_1^2	10	10
P_2^2	0	0

m' da a B y C la misma medida puesto que m' no depende sino de la repartición en la seudo-familia y las distribuciones (10, 0, 0, 10) y (10, 10, 0, 0) se obtienen una a partir de la otra por pernutación de los predicados de esta seudo-familia. $\overline{m}$ da a A y B la misma medida, puesto que $\overline{m}$ depende exclusivamente de reparticiones marginales que son idénticas en estos dos casos. Ahora bien, sería deseable que se tuviera $m(A) < m(B) < m(C)$, puesto que la uniformidad de A a C es creciente y tradicionalmente las distribuciones más uniformes son consideradas las más probables *a priori* (cf. *W.I.L.*, pp. 251-252).

Hagamos notar igualmente que $\overline{m}$ no da cuenta de la variedad. Es fácil convencerse de este hecho constatando que si h es P_1a (no perteneciendo a a la muestra), las medidas de las distribuciones estadísticas representadas por (5, 6, 5, 5) y (10, 1, 0, 10) son iguales y ya que $c(h, e)$ tiene el mismo valor que e designa la distribución A o la distribución B, si se mantiene la medida $\overline{m}$.

Como hace **Carnap**, se puede determinar la significación de η a partir de la siguiente observación: si e es una distribución estadística relativa a una muestra: i y j dos fórmulas que atribuyen a una constante no perteneciente a la muestra, respectivamente, los predicados P_1^1 y P_1^2 y P_2^1 y P_2^2; h una fórmula que atribuye a otra constante no perteneciente a la muestra P_1^1 y P_2^2, se tiene: $c(h, e \,\&\, i) > c(h, e \,\&\, j)$ y la diferencia $c(h, e \,\&\, i) - c(h, e \,\&\, j)$ es tanto mayor, siendo lo demás igual, cuanto mayor es η.[52] Esta condición es razonable: la constante descrita en h es más semejante a la descrita en i (puesto que tienen en común el predicado P_1^1) que a la descrita en j (con la que no tiene ningún predicado común). Así, el sistema construido tiene en cuenta la analogía. Está claro que, por procedimientos triviales, se podría extenderlo a sistemas que comprendan cualquier número de familias de predicados, con tal que este número sea finito[53].

Estos trabajos permiten resolver ciertas dificultades relativas a los lenguajes L^π. Una de sus fuentes era la siguiente: sea un lenguaje con tres predicados primitivos: P_1, P_2 y P_3. h es de la forma "$P_1a \,\&\, P_2a \,\&\, P_3a$" y e es una distribución estadística relativa a una muestra que no contiene a. Para determinar $c(h, e)$ sólo cuenta el número de elementos de la muestra que son, a la vez, P_1, P_2 y P_3. Por ejemplo, poco importa que todos posean los predicados $\sim P_1$, $\sim P_2$, $\sim P_3$ o que todos posean los predicados P_1, P_2 y $\sim P_3$. La probabilidad será la misma. Dicho brevemente, no se toma en cuenta la analogía parcial de los elementos de la muestra con el predicado en cuestión. En otras palabras, no interviene en modo alguno un factor sin embargo esencial, a saber, la desigual distancia de los predicados Q: Así $Q_1 = P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, P_3$ está más cerca de $Q_2 = P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, \sim P_3$, con el que tiene dos predicados comunes, que de $Q_4 = P_1 \,\&\, \sim P_2 \,\&\, \sim P_3$ con el que sólo tiene un predicado común; *a fortiori* está más cerca de Q_2 que de $Q_8 = \sim P_1 \,\&\, \sim P_2 \,\&\, \sim P_3$, con el que no tiene ningún predicado común.

Se puede pensar que todas estas consecuencias derivan del hecho de que, a partir de predicados primitivos, se ha constituido un conjunto (el conjunto de los predicados Q) que no es en realidad más que una seudo-familia y a la que se trata como una auténtica familia. Nos veríamos llevados entonces a considerar los lenguajes L^π no como lenguajes con 1 familia de 2^n predicados, sino con n familias de 2 predicados (las parejas de predicados fundamentales), y a definir sobre estos lenguajes funciones de confirmación que dependerán de dos parámetros: λ y η, y en los cuales se tendrá en cuenta la analogía. En relación con estos sistemas más complejos, las funciones estudiadas en *The continuum of inductive methods* consituyen un caso de degeneración resultante de establecer $\eta = 0$.

---

[52] Esta condición es propuesta como un axioma que no sería satisfecho si se tuviera $\eta = 0$ (Cf. *W.I.L.*, Na, 16, p. 252).

[53] m' se obtiene reuniendo todas las familias en una seudo-familia, estableciendo $\overline{m}$:

$$\overline{m}(e) = m(e_1), \ldots, m(e_n)$$

estando $e_1, \ldots, e_n$ definidos como anteriormente.

Sin duda estos nuevos resultados constituyen una importante mejora de los sistemas de lógica inductiva. En cierto sentido, permiten tomar en cuenta la analogía en el cálculo de los grados de confirmación. Pero no dejan de tener defectos: no sólo dan lugar a cálculos a veces enrevesados[54], lo que en el plano teórico no tiene importancia, sino que, sobre todo, aumentan la indeterminación de c, que depende de dos parámetros. Ahora bien, ninguna razón seria puede darse para justificar la elección de un valor particular de η. En realidad, su existencia sirve, sobre todo, para probar que es posible mejorar los sistemas primitivamente constituidos y evitar algunas de las dificultades que suscitan. Pero es largo el camino que separa su construcción del establecimiento de una teoría de la confirmación adaptada a las exigencias del análisis científico. En efecto, sólo se toman en consideración sistemas muy sencillos que son todos de primer orden y no contiene más que predicados monádicos. Queda por ver si los métodos utilizados serán eficaces cuando se los aplique a lenguajes más ricos.

4. La teoría de la confirmación y los lenguajes teóricos

Desde el instante en que se introducen en un sistema semántico predicados diádicos, la definición de un grado de confirmación tropieza con obstáculos considerables. En efecto, es fácil mostrar que los métodos que permitían reducir el conjunto de las funciones aceptables a una familia dependiente de uno o dos parámetros en tanto que sólo se trataba de predicados monádicos pierden su eficacia y no ofrecen sino resultados incomparablemente más débiles cuando se los aplica a sistemas más complejos.

Habiendo probado que la función c está plenamente determinada desde el momento en que se han elegido sus valores para las parejas de la forma $\langle h_i, e_i \rangle$ (siendo e_i –recordémoslo– una distribución individual relativa a la división $\{Q_i, \sim Q_i\}$, siendo h_i de la forma "$Q_i a$") y sus valores son los mismos para todos los predicados Q, se probaba, por aplicación de la condición de simetría a las permutaciones de constantes, que si e_i' es la distribución estadística correspondiente a e_i, se tiene $c(h_i, e_i) = c(h_i, e_i')$. De ahí, la posibilidad de introducir la función g que no depende más que de s_i, de s, y eventualmente de k y de establecer: $c(h_i, e_i) = g(s, s_i, k)$. Ahora bien, esta transición a la función g es la que está prohibida en el caso presente.

Situémonos en la hipótesis más sencilla: hay un solo predicado diádico R, sin estructura lógica. Sean $\langle a_1, b_1 \rangle, \ldots, \langle a_s, b_s \rangle, \langle a, b \rangle$ diferentes parejas de constantes. h_R es Rab, a_R una distribución individual de las primeras parejas en relación con la división $\{R, \sim R\}$. CA 2 permite limitar el lenguaje a las constantes que figuran en estas parejas. Pero la condición de simetría no permite en modo alguno pasar de las

[54] De ahí resulta el hecho de que **Carnap** se contente con presentar la axiomática de estos sistemas sin dar resultados numéricos.

distribuciones individuales a las distribuciones estadísticas e introducir la función g. En efecto, en razón de las relaciones formales que pueden existir entre los elementos de la muestra (identidad o distinción de los componentes de ciertas parejas, simetría, reflexividad circunstanciales, etc.), no se excluye que distribuciones individuales correspondientes a la misma distribución estadística no puedan obtenerse una a partir de la otra por permutación de las constantes[55]. Llamemos isomorfas a dos distribuciones individuales (compuestas de fórmulas que atribuyen la relación R a parejas) que pueden obtenerse una a partir de la otra por permutación de las constantes. Sea una permutación de constantes que aplica h_R sobre $\overline{h}_R$ y que aplica e_R sobre la distribución isomorfa $\overline{e}_R$. Se tiene $c(h_R, e_R) = c(\overline{h}_R, \overline{e}_R)$, relación incomparablemente más débil que $c(h_i, e_i) = g(s, s_i, k)$. Es evidente que el número de clases de isomorfía de las distribuciones individuales correspondiente a la misma distribución estadística relativa a R crece muy rápidamente con el tamaño de la muestra y, en consecuencia, es moralmente cierto que el grado de confirmación permanecerá muy indeterminado, cualquiera que sean las relaciones de recurrencia que deban satisfacerse.

Es evidente que cabe aplicar el mismo razonamiento a todo lenguaje más rico. Como es innegable que el lenguaje de la ciencia es infinitamente más rico que un lenguaje L^{π}, en el caso en que fuera posible definir, para este lenguaje, un grado de confirmación, su elección tendría el gran peligro de no ser más que el producto de convenciones arbitrarias.Pero, si se toma en consideración la estructura del lenguaje de la ciencia, se plantean otros problemas mucho más graves puesto que se pone en cuestión la posibilidad de definir un grado de confirmación para el lenguaje de la ciencia.

Hasta ahora nos hemos limitado prácticamente siempre a sistemas cuya morfología era la de los cálculos funcionales de primer orden. Sólo tales sistemas satisfacen los requisitos que se imponen comúnmente a los lenguajes de observación y que, según **Carnap**[56], son los siguientes: son extensionales; el conjunto recorrido por las variables individuales puede ser finito (en términos precisos, para casi todo n finito tienen un modelo n); pueden ser interpretados de tal modo que las constantes descriptivas designen objetos observables o relaciones observables entre tales objetos; en otras palabras, la observación basta para garantizar la verdad de ciertas fórmulas singulares de estos lenguajes; por último, se satisfacen los requisitos del nominalismo, puesto que los valores de las variables son siempre entidades observables. Además,

[55] Es el caso de las siguientes distribuciones que corresponden enteramente a la distribución estadística definida por $s = 4$ y $s_R = 3$:

$$Rab \,\&\, Rbc \,\&\, Rac \,\&\, \sim Rad$$
$$Rab \,\&\, Rbc \,\&\, Rac \,\&\, \sim Rde$$
$$Rab \,\&\, Rbc \,\&\, \sim Rac \,\&\, Rde$$
$$Rab \,\&\, Rba \,\&\, Raa \,\&\, \sim Rde, \text{ etc...}$$

[56] *M.C.T.C.*, § 5, p. 48 y § 10-11, pp. 62-69.

hemos supuesto siempre que las constantes derivadas estaban explícitamente definidas a partir de las primitivas.

¿Podemos contentarnos con un lenguaje tal para expresar el conocimiento científico? La teoría de la construcción lógica, que pide que todos los conceptos teóricos sean definidos explícitamente a partir de constantes del lenguaje de observación, sin el cual estarían desprovistos de sentido, responde afirmativamente. Pero hemos dicho que está establecida su incapacidad para dar cuenta del pensamiento científico y que no encuentra ya defensores. No nos podríamos contentar con esas modestas extensiones del vocabulario de observación a las que hemos querido primeramente limitarnos. Por ejemplo, no basta autorizar la introducción de conceptos definidos no por definiciones explícitas sino por fórmulas condicionales, como los famosos "predicados de disposición", y suplir las exigencias primitivas pidiendo solamente que las fórmulas teóricas se transcriban en el lenguaje de observación así ampliado. Esta tesis, que es la del operacionalismo de **Bridgman**, ha parecido a muchos autores como una consecuencia necesaria de la teoría positivista de la significación. Pero, cualquiera que sea su crédito, ha debido reconocerse que restringe en forma abusiva el pensamiento científico. No podemos discutir aquí un problema muy complejo, ajeno a lo que constituye nuestra preocupación esencial; seremos pues dogmáticos en este punto. Es evidente que, progresivamente, el criterio positivista de la significación se ha debilitado. **Carnap**, que fue uno de los defensores de la teoría de la construcción lógica, condena el operacionalismo. El hecho es significativo. Se ha debido reconocer que la construcción de la ciencia exige el uso de vocabulario teórico y que las fórmulas que emplean este vocabulario son irreductibles al lenguaje de observación, incluso si se concibe éste en forma ampliada. Todo lo que se pedirá es que los dos lenguajes estén vinculados en el sentido de que ciertas fórmulas que empleen un vocabulario mixto sirvan para deducir, de las fórmulas teóricas, los enunciados de observación. Además, no se considerarán significativas más que las constantes del vocabulario teórico que cumplan ciertas condiciones. Sobre la elección de estas condiciones no se ha llegado a un acuerdo, pero es cierto que no se sueña ya con exigir la reductibilidad de las constantes teóricas a las constantes de observación.

Si numerosos problemas permanecen en suspenso, ciertas cuestiones relativas a la estructura del lenguaje de la ciencia han sido dilucidadas: ya que el conjunto de las matemáticas puede ser utilizado en una teoría inductiva, es preciso que el lenguaje de la ciencia permita la "reconstitución del conjunto de las matemáticas". Consecuentemente, es preciso admitir, con **Carnap**[57], que en el dominio de variación de las variables del vocabulario teórico figure un dominio D que satisfaga las siguientes condiciones:

1) D contiene un sub-dominio I enumerable.

2) Todo n-tuplo de términos de D pertenece a D.

3) Toda clase de términos de D pertenece a D.

[57] *M.C.T.C.*, § 3, p. 43.

Siguiendo a **Carnap** supondremos, pues, que el lenguaje de la ciencia satisface las siguientes condiciones: su morfología es la de la teoría de tipos de **Church.** El conjunto de las constantes descriptivas está dividido en dos subconjuntos separados: V_T y V_O, llamados respectivamente vocabulario teórico y vocabulario de observación. Las constantes de V_O son de tipo ι o bien son predicados con n argumentos (siendo n finito) sobre ι. Pertenecen al lenguaje de observación, designado por L_O, las fórmulas en que sólo aparecen constantes o variables de estos tipos. Las demás constantes pertenecen a V_T y las restantes fórmulas pertenecen al lenguaje teórico que se designará por L_T. La semántica del sistema *no impone que* R_ι *sea infinito.* Al contrario, exige que haya un tipo de variables teóricas, o sea ι', *tal que* $R_{\iota'}$ *sea infinito.* Ello ofrece la posibilidad de construir las matemáticas en L_T (se definen, a partir de términos del tipo ι', los enteros naturales, los enteros racionales, los reales, los espacios vectoriales, etc.).

Una teoría inductiva, supuesta deductivamente cerrada y axiomatizable, se presenta en forma de una clase $\{T\}$ de fórmulas de L_T que constituyen los principios de la teoría. Estando separados L_O y L_T, para deducir de $\{T\}$ enunciados de observación es preciso añadir fórmulas en las que figure un vocabulario mixto. Se llamará "postulados de correspondencia" a estos enunciados, cuyo conjunto se designará por $\{C\}$. Sería un error ponerlos en el mismo plano que los postulados de significación. No están vacíos de contenido empírico; la prueba está en el hecho de que, cuando la ciencia evoluciona, a menudo las modificaciones recaen sobre ellos. Por eso se les considerará enunciados que pertenecen propiamente a las teorías que estén definidas por la conjunción de los dos conjuntos $\{T\}$ y $\{C\}$. Para que una teoría esté provista de significación empírica, es preciso que figuren entre sus teoremas fórmulas del lenguaje de observación que no son lógicamente verdaderas. Pero, siendo necesaria, esta condición no es suficiente, pues permitiría la adscripción a una teoría de cualquier fórmula (en particular, fórmulas que formalizan enunciados "metafísicos", en el sentido que los positivistas dan a este término). Para resolver el problema así planteado, se ha pensado en definir la noción de "concepto significativo" y en derivar de ella una definición de las fórmulas teóricas significativas. Este procedimiento, que olvidaba que conceptos y fórmulas no tienen sentido sino en el interior de una teoría determinada, ha llevado a criterios demasiado restrictivos[58]. Por nuestra parte, propondremos el siguiente criterio: dos clases de fórmulas son llamadas O-equivalentes si tienen, en L_O, la misma clase de consecuencias. Una teoría es significativa si no es O-equivalente a ninguna de sus partes propias. Una fórmula es significativa en relación con $\{T \,\&\, C\}$ si la teoría obtenida por su adscripción a $\{T \,\&\, C\}$ no es O-equivalente a $\{T \,\&\, C\}$.

Lo que ahora sabemos de los lenguajes teóricos es suficiente para establecer im-

[58] Así sucede en el criterio propuesto por **Carnap** (*M.C.T.C.*, § 6, p. 51, D. 1.º): para que este criterio sea satisfecho por una teoría es preciso que exista al menos una constante teórica M, tal que de una fórmula que contenga M como única constante teórica se deduzcan fórmulas sintéticas del lenguaje de observación. Una exigencia semejante nos parece abusiva.

portantes consecuencias. R_t' es, al menos, enumerable. De ello se sigue que un lenguje teórico no tiene un modelo finito. Así pues, no es posible servirse de los procedimientos de **Kemeny** para definir una medida lógica y un grado de confirmación en ellos.

¿Podrían resultar válidos métodos radicalmente diferentes allí donde fracasan los métodos tradicionales? El hecho es que no ha sido propuesto ninguno. Todo lo más se pueden encontrar, en la literatura existente, algunas vagas orientaciones sobre lo que podrían ser estos nuevos métodos y lo menos que se puede decir es que estas indicaciones permiten prever el recurso a procedimientos sospechosos. Haciendo notar la importancia de la condición de simetría, **Carnap** propone aplicar la invarianza no a los predicados de observación, sino a las magnitudes fundamentales, "por ejemplo, atribuyendo, en un intervalo de la escala de una magnitud fundamental, valores m iguales a sub-intervalos iguales"[59]. El precisa que es cierto que "las magnitudes primitivas del lenguaje teórico", jugarán un papel fundamental en la extensión de un grado de confirmación a un lenguaje teórico. Esta transformación de la lógica inductiva no constituiría una degeneración de sus principios, sino el paso de un método inductivo precientífico a un método científico. Cierto que, según veremos, el método primitivo merece el calificativo de "precientífico" que se le aplica. Pero no se podría, sin abuso, estimar al método recientemente propuesto como conforme a las exigencias del pensamiento científico. En realidad, es totalmente inadmisible.

Indiquemos, ante todo, que reintroduce el principio de indiferencia en toda su generalidad. Al restringir la aplicación a las "magnitudes fundamentales", permite quizá evitar las paradojas burdas, semejantes a las desarrolladas por **Keynes**. Sin embargo, ¿cómo aplicaremos este principio a magnitudes cuyo intervalo de variación es el conjunto de los reales o un conjunto enumerable? Es de temer que en ese caso se recurra a alguna hábil transformación para engendrar una magnitud que se considerará como fundamental para las necesidades del asunto. Pero, plantearemos una cuestión más radical preguntando qué es una magnitud fundamental. Se puede responder que es una magnitud que juega un papel fundamental en una teoría determinada. Pero, entonces, ¿por qué privilegiarla si es, precisamente, la probabilidad de la teoría que le confiere su carácter fundamental la que se cuestiona? O bien, situándose en una perspectiva ingenuamente realista, se puede decir que es una magnitud que, lejos de estar definida convencionalmente, se funda en la naturaleza de las cosas, expresa una propiedad "esencial" de los objetos descritos por la teoría. En este caso, se debe reconocer que la discriminación de las magnitudes fundamentales sólo puede ser el producto de inducciones complejas. En cualquier caso, una teoría de la inducción que presuponga el carácter fundamental de ciertas magnitudes no puede estimarse como una doctrina de la inducción primaria. Los procedimientos propuestos por **Carnap** pueden tener sentido en ciertos sectores de una teoría de la inducción secundaria, pero no pueden conducir a una lógica inductiva digna de este nombre.

[59] *P.R.*, p. 988.

Excluidos los métodos de este tipo, ¿es preciso renunciar a definir un grado de confirmación sobre un lenguaje teórico? Estamos inclinados a creerlo. Todo lo más, es posible introducir algunos conceptos que serían sustitutos y jugarían, en este dominio, un papel análogo al del grado de confirmación especificado. Por ejemplo, se podría proceder así: estando definido el grado de confirmación de una clase de fórmulas como el grado de confirmación de su conjunción[60], se toma como sustituto del grado de confirmación de un enunciado teórico el grado de confirmación de la clase de sus consecuencias que pertenezcan al lenguaje de observación. Pero, en general, una fórmula teórica aislada no tiene consecuencias observables, por eso la definición precedente se aplicaría mejor a las teorías mismas. O bien se la relativizará y se hablará del grado de confirmación de una fórmula teórica, relativamente a una teoría y a una evidencia determinada[61].

Sin embargo, es preciso no hacerse ilusiones acerca del valor de los conceptos definidos de esta forma: Pudiendo L_O contener predicados poliádicos, conocemos las dificultades encontradas en la determinación efectiva de una medida sobre L_O. Entre las consecuencias de los enunciados teóricos figuran, en general, leyes universales. Es, pues, probable que sean nulos todos los grados de confirmación definidos de manera oblicua. Además, como los grados de confirmación especificados, no serán funciones de apuesta coherentes. En fin, y ahí está lo más grave, hay ciertas contradicción en confundir una fórmula teórica con la clase de sus consecuencias observables en el momento mismo en que se reconoce plenamente la necesidad de distinguir lenguaje teórico y lenguaje de observación. Por supuesto, siguiendo el camino que hemos seguido, se podría introducir otros conceptos, utilizar definiciones más sutiles que las que hemos propuesto. Pero es verosímil que, esencialmente, los obstáculos encontrados serían los mismos. Es decir, la definición de un auténtico grado de confirmación sobre un lenguaje teórico parece definitivamente fuera de nuestro alcance.

Limitados en sus aplicaciones a lenguajes muy restringidos, los métodos inspirados en los trabajos de **Carnap** alcanzan un cierto éxito. Condiciones de adecuación aceptables restringen a una familia paramétrica las funciones de confirmación admisibles. Pero, desde el momento en que se enriquece un poco el lenguaje, se defrauda la esperanza de resultados semejantes. Más bien, parece imposible determinar

---

[60] Si se trata de una clase infinita $(\alpha_n)_{n\in N}$, se establecerá

$$c(\bigwedge_{n=1}^{\infty} \alpha_n, e) = \lim_{p\to\infty} c(\bigwedge_{n=1}^{p} \alpha_n, e) = c((\alpha_n)_{n\in N}, e).$$

[61] Sea α un enunciado de L_t; $\{T \,\&\, C\}$ una teoría; e una evidencia (que pertenece a L_O y que se supone no contradice $\{T \,\&\, C\}$. El concepto aludido estaría, en rigor, definido así: se considera la clase de las fórmulas de L_O que no se deducen de $\{T \,\&\, C\}$ sólo, sino que se deducen de ella con la adición de α. Sea A esta clase. El grado de confirmación relativo de α será $c(A, e)$.

un grado de confirmación sobre un lenguaje que responda a las necesidades del pensamiento científico. No se puede, pues, pedir a la teoría de la confirmación que fundamente una lógica inductiva plenamente satisfactoria. ¿Quiere decir esto que está sin embargo capacitada para aportar una respuesta a los problemas que plantea la inducción, si no se toman en consideración más que algunos tipos de inferencia particularmente sencillos? Esta es la cuestión que debemos plantear ahora.

CAPITULO XIII

LA TEORIA DE LA CONFIRMACION Y EL PROBLEMA EPISTEMOLOGICO DE LA INDUCCION

La lógica inductiva, si se toma este término en su sentido estricto, no tiene sino una función restringida. Su único fin es la solución de un problema formal: construir un grado de confirmación que satisfaga ciertas condiciones de adecuación. Este fin sólo ha sido imperfectamente conseguido. Incluso si se toman en consideración lenguajes muy limitados, el grado de confirmación no está totalmente determinado. El margen de indeterminación aumenta con la complejidad de los lenguajes. Además, es probable que no pueda definirse ningún grado de confirmación respecto a un lenguaje tan amplio que permita la expresión del conjunto del conocimiento científico. Por tanto, no se puede conservar la esperanza de fundamentar sobre la teoría de la confirmación una doctrina del pensamiento inductivo plenamente satisfactoria y adaptada a las exigencias del conocimiento científico.

Sin embargo, es razonable suponer que la perspectiva de **Carnap** permite constituir una teoría que satisfaga ciertas formas de inferencia inductiva. Pero es preciso indicar que no se podrá, en modo alguno, considerar alcanzado este resultado desde el momento en que se hayan resuelto los problemas formales que derivan de una lógica inductiva. Todavía es preciso constituir esa metodología de la inducción que **Carnap** distingue cuidadosamente de la lógica inductiva y que es el complemento necesario en toda doctrina epistemológica de la inferencia inductiva. Ahora bien, nada prueba que una lógica inductiva aparentemente sana exija una metodología inadmisible. De este modo, se interfieren el desarrollo formal y las consideraciones metodológicas. La distinción entre lógica y epistemología no significa su plena independencia. Por ejemplo, lo que ha obligado a **Carnap** a abandonar la función c^* es la necesaria introducción de una condición de aplicación inadmisible –la completud de la descripción–. Por tanto, no se podrá saber si se ha construido una teoría restringida, pero aceptable, de la inferencia inductiva más que sometiendo a examen no la lógica inductiva tomada aisladamente, sino el método inductivo, es decir el conjunto constituido por esta lógica y la metodología que debe añadírsele.

Es evidente que este examen supone que previamente se hayan enumerado los problemas que dependen de la metodología de la inducción. Por fuerza ha de reconocerse que estos problemas son de naturaleza diversa. Existen en primer lugar cuestiones relativas a la aplicación de la lógica inductiva, que se presentan en la siguiente forma: determinar las condiciones que deben satisfacer los *designata* de las constan-

tes descriptivas de los lenguajes considerados. En efecto, si fuera ilimitada la libertad en la elección de las interpretaciones, sería posible que nos viéramos conducidos a resultados absurdos, incluso contradictorios, en la medida en que modalidades diferentes de aplicación de una misma lógica llevarían a asignar distintas probabilidades a una misma hipótesis en las mismas circunstancias.

Además, se plantean cuestiones relativas al uso de la lógica inductiva. Supongamos determinadas las condiciones de aplicación de una teoría de la confirmación. Se puede entonces atribuir una probabilidad a las parejas de proposiciones. Pero, excluido el caso de la ciencia probabilitaria, el conocimiento de la naturaleza se presenta no en forma de un conjunto de asignaciones de probabilidades a determinadas hipótesis, sino en forma de la aserción de estas hipótesis. Será preciso, pues, establecer un cuerpo de reglas que tengan por finalidad especificar cómo se pueden utilizar las asignaciones de probabilidades para integrar ciertos enunciados en el cuerpo de las verdades científicas. La determinación de estas reglas no es una tarea tan fácil como podría creerse.

Por último, subsiste el problema de la justificación de los sistemas constituidos. El planteamiento de este problema puede ser retrasado pero no eludido indefinidamente. Cuando se considera a la lógica inductiva como un simple sistema formal, se puede decir que no es preciso justificarla. Pero el argumento no resulta válido cuando se le añaden reglas de aplicación y reglas de uso, cuando funciona como una parte de un método inductivo. En este caso, es preciso que, de alguna manera, sea justificada, que se pruebe que las elecciones que se han hecho se imponen. Sin embargo, como veremos, el problema de la justificación de la inducción es tan difícil de plantear como de resolver. Pero no es menos cierto que negar su existencia supondría olvidar que la lógica inductiva ha sido elaborada para aportar una solución al problema de la fundamentación del conocimiento experimental.

La finalidad de este capítulo es el estudio de las respuestas que pueden aportarse a los diferentes problemas que colocamos convencionalmente bajo la rúbrica de "metodología". Nuestro objetivo es mostrar que no pueden recibir una solución satisfactoria. Por eso es deseable situarse en las condiciones más favorables a una solución positiva, que son, al mismo tiempo, las que permiten concluir con la mayor claridad. Por tanto, nos limitaremos prácticamente al estudio del sector en el que la lógica inductiva ha permitido obtener los resultados más satisfactorios. Nos referimos, naturalmente, a los grados de confirmación relativos a los lenguajes L^π. Los problemas correspondientes a estos sistemas han sido efectivamente estudiados. Presentan en cierto modo una imagen simplificada de las cuestiones metodológicas generales. Además, es cierto que la construcción de una metodología satisfactoria implica que sean resueltos. En efecto, es muy verosímil que las funciones de confirmación definidas sobre lenguajes más amplios sean "extensiones" de las funciones relativas a los lenguajes L^π. De ello se sigue que la metodología que se le añadiera resolvería *ipso facto* las cuestiones concernientes a la aplicación, el uso y la justificación de los métodos inductivos relativos a los lenguajes L^π. Si probamos que, incluso en

este caso privilegiado, las cuestiones metodológicas no admiten una solución satisfactoria, se conseguirá un resultado doble. De modo general, se habrá establecido la imposibilidad de integrar la lógica inductiva en una teoría del conocimiento experimental epistemológicamente satisfactoria. Además, se habrá probado que los resultados alcanzados no permiten constituir una doctrina aceptable de ciertas formas de inferencia inductiva.

1. La aplicación del método inductivo

Ha sido plenamente reconocida la existencia de un problema en la aplicación del método inductivo, problema específico, exterior a la propia lógica. Según **Carnap**, la existencia de este problema depende del hecho de que "los sistemas puros de lógica inductiva y deductiva se refieren a las fórmulas proposicionales (o a las proposiciones que ellas expresan) más bien que a los estados de conocimiento, de creencia, de asunción, etc., en tanto que toda aplicación de la lógica inductiva a una situación actual versa sobre estos estados". Concluye de ahí que "esta aplicación está fuera de la lógica considerada en sí misma"[1]. Puede criticarse esta formulación del problema que permite pensar que los elementos no-lingüísticos se reducen a vivencias de conciencia. Pero lo que importa es el reconocimiento del carácter no-formal de estos problemas de aplicación que sólo han dado lugar a un tratamiento sistemático en el caso restringido de las funciones definidas sobre lenguajes cuya morfología es análoga a la de los lenguajes L^{π}, excepto en que su alfabeto puede contener un número finito de predicados poliádicos[2].

Aplicar una lógica inductiva es determinar las denotaciones de los términos descriptivos del lenguaje al que se refiere. Todo el problema de la aplicación consiste en buscar las condiciones que deben cumplir las entidades denotadas para que no se aboque ni a resultados desacertados ni a contradicciones. Si nos limitamos a los sistemas restringidos que acabamos de describir, se impondrá a las constantes individuales que denoten los objetos del universo perceptivo. Se supondrá que constantes diferentes denotan objetos diferentes. Pero, ¿qué ha de entenderse por "objeto del universo perceptivo"? **Carnap** los identifica con los "cuerpos físicos o acontecimientos del universo actual, o más bien con las posiciones como los puntos del espacio-tiempo en nuestro universo actual, así pues, con entidades inextensas, indivisibles"[3]. Pero es necesario precisar que, incluso aunque las entidades denotadas designaran posiciones, no se les atribuye un orden[4]. En cuanto a los predicados, designa-

---

1 *L.F.P.*, § 45, p. 209.

2 Cf. *A.I.L.*

3 *L.F.P.*, § 18, p. 73 y *A.I.L.*, p. 114.

4 Para expresar el orden de los *designata* sería necesario pasar a lenguajes en los que el orden de las constantes no sea ya simplemente lexicográfico (*L.F.P.*, § 15, pp. 62-63). En *A.I.L.* (p. 140), **Carnap** precisa que, a menos de hacer del orden una propiedad cualitativa, estos lenguajes no serán "lenguajes de cosas", sino "lenguajes de coordenadas". Posteriormente se han

rán naturalmente propiedades observables de las entidades denotadas por las constantes o relaciones observables entre estas entidades, según su número de argumentos. Se admite que predicados diferentes tienen, si no denotaciones distintas, al menos sentidos distintos. En estas condiciones las fórmulas se interpretan como proposiciones del lenguaje de observación.

Sabemos ya que deben cumplirse condiciones suplementarias por parte de toda aplicación aceptable. Inicialmente **Carnap** llegaba a imponer la independencia lógica de las fórmulas atómicas y la completud de la descripción. Esta última desorbitante condición le obligó a abandonar la función c^*. En cuanto a la independencia lógica de las fórmulas atómicas, exige la independencia de los predicados y la no-estructuración de los predicados poliádicos. Más vale rechazarla también. Además, hemos visto que los procedimientos introducidos por **Kemeny** permiten esta exclusión. Pero no es menos cierto que, incluso si sólo se consideran los lenguajes más sencillos –los que no contienen predicados poliádicos–, estamos obligados a introducir condiciones suplementarias. **Carnap** pedirá que las propiedades designadas por los predicados sean propiedades *cualitativas* y que sean simples[5]. ¿Por qué estas condiciones? ¿Qué significan? ¿Se pueden admitir?

La necesidad de estas condiciones aparece cuando se constata que su ausencia podría llevar a conclusiones absurdas. Al igual que el sistema de **Reichenbach**, el de **Carnap** tropieza con la paradoja de **Goodman** u otras paradojas cercanas. El "nuevo enigma de la inducción" es, por otra parte, esencialmente concebido por su autor como un argumento contra las teorías de la confirmación, métricas o no métricas[6], como lo atestigua la amplitud de la polémica entre **Goodman** y **Carnap.** El hecho es que, si se interpreta un predicado primitivo de un sistema L^π como el nombre de la propiedad "verdul", las funciones c llevan a atribuir probabilidades inadmisibles a la hipótesis "la próxima esmeralda será azul" tras observaciones de n esmeraldas que son todas azules. Además, será fácil construir antinomias.

En respuesta a esta dificultad, **Carnap** arguye que en la argumentación de **Goodman** se viola el principio de la evidencia total[7]. Si sólo se utiliza el predicado "verdul" que tiene una significación compuesta, no se puede expresar el hecho, sin embargo conocido como verdadero, de que todas las esmeraldas han sido observadas antes del instante t. Poco importa que el grado de confirmación obtenido por la utilización del predicado "verdul" sea inadmisible. No será nunca utilizado puesto que corresponde a una situación en que, por definición, no se toma en cuenta más que una parte de la evidencia: decir que un objeto cuyo nombre figura en el segundo argumento es "verdul", es decir a la vez que es verde y ha sido observado antes del ins-

---

hecho tentativas para tomar en cuenta el orden de las constantes en la edificación de la lógica inductiva (cf. *V.A.P.*, § 5, p. 225). Pero aquí se estudia el problema de la aplicación de sistemas en los que no se toma en cuenta el orden de las constantes.

[5] *A.I.L.*, pp. 136 y 138.

[6] Cf., especialmente, **Goodman**: *F.F.F.*, pp. 72 y sig.

[7] *A.I.L.*, pp. 139-140.

tante t. En las aplicaciones, será preciso tomar en cuenta cada una de estas dos propiedades.

Esta respuesta tiene una molesta consecuencia: exige una interpretación fuerte del principio de la evidencia total. Se requiere tomar como segundo argumento de las probabilidades no sólo lo que se conoce verdaderamente y se expresa en el lenguaje considerado –lo que constituye la interpretación débil de este principio–, sino todo lo que se conoce como verdadero. Por tanto, se corre el riesgo de hacer inaplicables y de nula utilización estos sistemas simplificados de lógica inductiva que son relativos a lenguajes restringidos cuando son los únicos que se ha sabido construir. De todos modos, al igual que los argumentos del mismo tipo propuestos por **Reichenbach**, la respuesta de **Carnap** no va al fondo de la dificultad. Contra otras paradojas, su eficacia es nula. Tal es el caso de la paradoja de Agassi: si P designa la propiedad "producirse antes que t (designando t el instante presente) nos veremos llevados a otorgar un elevado grado de confirmación a la hipótesis "$(x)Px$" que se interpreta así: "Todos los acontecimientos se producen antes del instante t"[8].

En realidad, lo que se cuestiona es el carácter "natural" de las propiedades designadas. Desde el momento en que se supone que un predicado denota la pertenencia a una clase que está definida extensionalmente, al menos en forma parcial, incluso si su definición no implica ninguna referencia a propiedades de posición, hay peligro de topar con paradojas. **Popper** dice que **Carnap** propone un sistema tal que "la evidencia 'Médor es fiel' aumenta la probabilidad de 'A es fiel', sea A el nombre de un gato, un perro, una manzana, una pelota de tenis o una catedral"[9]. Al margen de lo que esta afirmación tiene de ocurrencia chistosa –en particular la introducción de proposiciones que no tienen sentidos semánticos– es preciso confesar que la objeción es seria. Se está aquí en presencia de una dificultad común a todos los sistemas de lógica inductiva y, *mutatis mutandis*, se pueden retomar contra el sistema de **Carnap** los argumentos opuestos al sistema de **Reichenbach**. En realidad, si se quiere evitar inducir de cualquier cosa otra cualquiera, el dominio de las entidades designadas por las constantes debe ser limitado, lo mismo que los *designata* de los predicados. Se exigirán predicados que designen la pertenencia a clases que tengan una real unidad, una unidad que posea un *fundamentum in re.*

Consciente de estas dificultades, **Carnap** exige que los predicados sean nombres de propiedades puramente cualitativas, exceptuando las proposiciones posicionales (como las denotadas en la paradoja de Agassi) y las propiedades mixtas (como las puestas en juego en la paradoja de **Goodman**)[10]. Esta restricción es eficaz. Pero suscita varias dificultades. En primer lugar tiene el peligro de constituir un obstáculo para la constitución de sistemas en que se quisiera dar cuenta del orden[11]. Además

---

[8] Cf. **Popper** (K.): *D.S.M.*, pp. 217-218.

[9] *Ibid.*, p. 224. ¡Es verdad que si A es un nombre de perro, la probabilidad será más elevada si se puede construir un sistema que tome en cuenta la analogía!

[10] *A.I.L.*, p. 138.

[11] Cf. **Putnam** (H.) *D.C.I.*, El autor muestra que no se puede definir un grado de confirma-

no se acompaña de ninguna definición estricta de lo que se entiende por "propiedad puramente cualitativa". En fin, según veremos posteriormente, no se justifica más que en una perspectiva que concede a las cualidades sensibles un privilegio ontológico difícil de admitir.

La aplicación del sistema de **Carnap** conoce, pues, las dificultades que afectaban al sistema de **Reichenbach.** Sin embargo hemos indicado la superioridad del primero sobre el segundo, que reside esencialmente en la consideración de la extensión lógica de los predicados. Pero esta superioridad se paga con el hecho de que debe satisfacerse una nueva exigencia en las aplicaciones. No sólo los predicados deben denotar propiedades cualitativas, sino que también estas propiedades deben ser *simples.* Es fácil razonar la introducción de esta nueva condición: basta analizar un ejemplo sacado de los problemas de un sorteo. Supongamos que las constantes individuales son los nombres de las bolas de un bombo. Se infiere de las que han sido sacadas las que permanecen en el bombo. Entre estas bolas algunas son blancas, otras no, algunas están marcadas con una cruz, otras no lo están. Los predicados designarán esas propiedades que son indiscutiblemente cualitativas. Pero la aplicación de la lógica inductiva puede hacerse de dos maneras: Se puede introducir un lenguaje con dos predicados primitivos P_1 y P_2 que denotan respectivamente las propiedades "ser blanco" y "estar marcado con una cruz", o un lenguaje con un solo predicado que denota la propiedad "ser blanco y estar marcado con una cruz" Disponiendo de una cierta evidencia que se expresa en uno y otro lenguaje, de tal modo que sea respetado el principio de la evidencia total incluso bajo su forma fuerte, lo que supone decir que en la muestra observada han sido siempre unidas las dos propiedades "ser blanco" "estar marcado con una cruz", se calcula el grado de confirmación de la hipótesis: "la próxima bola sacada será blanca y estará marcada con una cruz", empleando el mismo método inductivo. Es evidente que se obtendrán resultados diferentes según la formalización utilizada[12].

Este resultado era previsible. El concepto de extensión lógica no tiene sentido más que una vez definido el conjunto de predicados considerados primitivos. Si se admite una arbitrariedad en la elección de sus denotaciones, la extensión lógica sólo tendrá un valor convencional. La extensión de una *propiedad* variará con el modo

---

ción adecuado sobre un lenguaje que permita la descripción del orden espacio-temporal. **Carnap** está en su derecho cuando contesta que una teoría de la confirmación puede dar cuenta del orden sin caer en contradicciones y añade que la argumentación de **Putnam** no se aplica más que a los sistemas primitivamente publicados. Pero no es menos cierto que sus condiciones de aplicación eran tales que no se podía dar cuenta del orden en estos sistemas. Por tanto, el enriquecimiento de estas teorías es imposible. Una lógica inductiva en la que el orden sea tomado en consideración no será una simple "extensión" de estos sistemas, sino que implicará un trastueque de los resultados obtenidos.

[12] Supongamos, por ejemplo, que se han observado 10 bolas todas blancas y marcadas con una cruz. Como valor del grado de confirmación de esta hipótesis, se obtiene utilizando un método de la primera especie definido por λ respectivamente $\frac{10+\lambda/4}{10+\lambda}$ y $\frac{10+\lambda/2}{10+\lambda}$.

de formalización. En estas condiciones, sería inaceptable, incluso contradictorio, considerar este factor como pertinente en la estimación del grado de confirmación. Así pues, es preciso introducir una regla que fije la extensión lógica de las propiedades y no sólo de los predicados no interpretados. Precisamente con este objetivo **Carnap** exige que los predicados primitivos denoten propiedades simples.

Pero, ¿qué debe entenderse por simplicidad? Es evidente que el concepto aquí introducido no tiene nada que ver con la simplicidad de la expresión formal de una ley, ni con la simplicidad de un sistema formal o de un predicado derivado que **Goodman** ha intentado medir[13]. No se trata de la simplicidad de los conceptos, sino de la simplicidad de sus *designata* que, en el ejemplo, son propiedades cualitativas. **Carnap** reconoce que no puede darse fácilmente una exacta explicación del concepto de simplicidad[14].

Sin embargo, propone ejemplos para dilucidar su sentido: "ser azul" es una propiedad simple, "ser un perro" no lo es. ¿Quiere decir esto que sólo son simples las propiedades dadas inmediatamente en la percepción? No, pues teniendo en cuenta algunos hechos destacados por la psicología de la forma, **Carnap** indica que una propiedad puede darse inmediatamente aunque sea compleja. Será simple una propiedad cualitativa que se resiste al análisis. Por análisis entendemos no el análisis objetivo que mostraría, por ejemplo, que el azul percibido como simple se deja descomponer espectralmente, sino la reducción por el análisis psicológico del dato perceptivo a esos elementos que son los *sense-data.* Son ésos los términos que, considerados como "naturalezas simples", serán tomados como designata de los predicados primitivos y tratados de manera idéntica puesto que nos limitamos a las funciones simétricas en relación con los predicados primitivos.

¿Puede admitirse tal definición de la simplicidad de las propiedades? ¿Qué significa su aceptación? ¿Tiene, incluso, sentido? Consciente de las objeciones que podrían dirigírsele, **Carnap** intenta debilitarlas mostrando que se encuentran condiciones análogas cuando se trata de aplicar la lógica deductiva. Las dificultades encontradas derivarían del hecho de que un lenguaje es siempre abstracto con respecto a la realidad que describe. Oponer el carácter discontinuo del lenguaje a la continuidad que se halla en el mundo de la sensibilidad es un argumento corrientemente utilizado para desacreditar el conocimiento conceptual. La abstracción, que introduce un desmembramiento en el continuo de la sensibilidad y no mantiene sino algunos caracteres de lo concreto, no es por ello menos necesaria. Por lo demás, **Carnap** indica que la posibilidad de perfeccionar los sistemas lingüísticos, de hacerlos cada vez más finos, limita los riesgos de su uso[15]. Se trate de la lógica inductiva o de la lógica deductiva, el problema sería, pues, el mismo: no hay perfecta adecuación del lenguaje con lo que describe. Contrariamente a lo que se podría pensar, en los dos casos se

[13] Cf., especialmente, *S.A.* y *L.S.P.*
[14] *A.I.L.*, p. 137.
[15] *L.F.P.*, § 45, pp. 210 y 215-219.

volverían a encontrar las mismas dificultades, se deberían satisfacer las mismas exigencias. Así, en la aplicación de la lógica deductiva, se dan circunstancias en las que es necesario suponer que el análisis ha sido llevado a su término, que ha alcanzado a los elementos simples. Este es el caso cuando se trata de aplicar el concepto de verdad analítica. La proposición "Todos los cuervos son animales" sólo aparece como analítica a aquél que lleva bastante lejos el análisis del término "cuervo".

En realidad, la argumentación es poco convincente. El problema de la aplicación se plantea bajo formas radicalmente diferentes cuando se trata de lógica deductiva o de lógica inductiva. Indiquemos ante todo que, si se puede distinguir entre sintaxis y semántica, para que la semántica tenga un contenido determinado es necesario que la interpretación se realice en un dominio que, sin estar necesariamente formalizado, comporte al menos definiciones y principios. Por ejemplo, si "$P \subset Q$" es analítica cuando "P" denota "ser un cuervo" y "Q" "ser un animal", es porque el dominio de aplicación implícitamente mantenido es el lenguaje corriente, en el que el cuervo se define como un animal, y no en virtud de alguna propiedad del objeto cuervo. Olvidar este hecho supondría anular la distinción entre verdades analíticas y verdades sintéticas que **Carnap** defiende, sin embargo, contra **Quine**. No tratamos de negar la existencia de una "semántica irreductiblemente ingenua, imposible de eliminar en su totalidad"[16], sino de afirmar que, por definición, está fuera del campo del pensamiento formal. De ahí la diferencia señalada en los problemas de aplicación según se trate de lógica deductiva o de lógica inductiva.

Consideremos, pues, las interpretaciones de un sistema formal que se efectúan en otro lenguaje, que puede eventualmente referirse a lo concreto. En el caso de la lógica inductiva, los conceptos del dominio de interpretación deben satisfacer ciertas condiciones que no se exigen en modo alguno si se trata de aplicar la lógica deductiva. La lógica deductiva es extensional: los predicados pueden designar propiedades artificialmente definidas, la pertenencia a clases "manufacturadas". Puede ser que en ciertos casos las aplicaciones estén desprovistas de interés, en la medida en que no estén dadas premisas útiles para las inferencias (ello ocurre si las clases están compuestas de elementos heteróclitos). Pero no pueden generar antinomias. Por el contrario, sabemos que en lógica inductiva es preciso suponer el carácter natural de las clases. La simplicidad no juega el mismo papel y no tiene la misma definición según se trate de lógica deductiva o de lógica inductiva. Consideremos el problema de la definición de las verdades analíticas. Un análisis insuficiente no lleva a conclusiones erróneas, sino a un conocimiento incompleto. Si no se lleva a su término el análisis del término "cuervo", simplemente se ignorará que la proposición "todos los cuervos son animales" es analítica, sin poder afirmar lo contrario. Indiquemos, por otra parte, que una vez alcanzada la analiticidad de una proposición no será de nuevo cuestionada. Además, en este caso, el análisis consiste en descomponer un concepto en otros conceptos. Es exhaustivo cuando se realiza sin omisión la enumera-

[16] Cf. **Martin** (R.): *L.C.F.*, pp. 55-56.

ción de los postulados de significación del dominio de interpretación mantenido. La simplicidad de un concepto se identifica con su estatuto de concepto primitivo. En el caso de la lógica inductiva, la insuficiencia del análisis genera errores puesto que, si los predicados primitivos no designan propiedades simples, son erróneas las asignaciones de probabilidad. Además, la simplicidad de un predicado significa, en este caso, la simplicidad de la propiedad que designa, de la cualidad sensible cuyo nombre es.

Asimismo el desmembramiento de un continuo en elementos discontinuos que tengan por nombre a los predicados de un lenguaje plantea problemas diferentes según la disciplina considerada. En lógica deductiva, según que sea más o menos fina, la descripción será más o menos completa; pero el desmembramiento puede ser arbitrario. En la lógica inductiva no sucede nada de esto. Supongamos que los colores sensibles forman un continuo. Su descripción se opera dividiendo este continuo e introduciendo una familia completa de predicados que será necesariamente finita. Pero la construcción de esta familia es arbitraria. Los límites de lo que se llama el "amarillo" son convencionales. Junto a un solo predicado "amarillo", la familia puede comprender un predicado "rojo", o diez predicados correspondientes a los diversos matices del rojo. Ahora bien, la restricción a las funciones simétricas exige que se traten de la misma manera los diversos predicados de estas familias que están, sin embargo, delimitados arbitrariamente. Supongamos fijados los límites de lo que se llama el amarillo, el grado de confirmación *a priori* de la hipótesis "este objeto es amarillo" será igual a $1/n$, siendo n el número de los colores distinguidos[17]. Es decir, no se escapa de la arbitrariedad. En realidad, la limitación a las funciones simétricas sólo está justificada si se admite que la interpretación de los predicados primitivos corresponde a una división efectuada según las discontinuidades reales. Dicho en pocas palabras, se vuelven a encontrar aquí, al nivel no del sistema formal sino de sus aplicaciones, las bien conocidas dificultades de la aplicación del principio de indiferencia a las probabilidades "geométricas". En la medida en que **Carnap** busca *designata* en el universo de los sense-data y hace corresponder los predicados con los nombres de propiedades sensibles, la aplicación de la lógica inductiva depende de la validez de una hipótesis relativa no al propio lenguaje de observación sino a la naturaleza del dato sensible y esta hipótesis parece refutada por la experiencia psicológica más banal.

El análisis precedente permite destacar las razones de las dificultades encontradas

[17] Se podría objetar que la frecuencia observada de los objetos de diferentes colores varía según el modo de formación de la familia de los predicados de color. La arbitrariedad introducida inicialmente por el desmembramiento del continuo de los colores se diluiría progresivamente al multiplicarse las observaciones. Asintóticamente, cualquiera que sea la familia escogida para un predicado delimitado de la misma manera, se llegaría a las mismas asignaciones de probabilidades. Supongamos válido el argumento. Se debe reconocer que no resuelve la dificultad señalada. Sólo en el caso en que la extensión del predicado no juega papel alguno –en el infinito– desaparece lo arbitrario. En tanto los grados de confirmación varíen con la extensión lógica de los predicados, dependen de la elección inicial de la familia considerada.

en la aplicación de la lógica inductiva. Derivan del hecho de que no se pueden poner entre paréntesis los problemas de la semántica ingenua, como sucede en la lógica deductiva. Si se elige el lenguaje de observación como dominio de interpretación, es preciso suponer que los términos de este lenguaje no corresponden a clasificaciones, a divisiones arbitrarias. Será necesario considerar sus referencias para poder determinar si la aplicación es válida. En pocas palabras, entra en juego la semántica ingenua. Se debe, por lo demás, reconocer que, cuando el sistema formal considerado es más complejo, toma en cuenta un mayor número de factores en la apreciación de las probabilidades y se multiplican las condiciones que es preciso imponer en la interpretación. En el sistema de **Reichenbach**, podía ser suficiente el hecho de que los predicados designen propiedades cualitativas. El sistema de *Logical Foundations of probability* otorga un papel a las consideraciones de simetría, al concepto de extensión lógica. Por tanto, se debe exigir que los predicados primitivos nombren propiedades simples.

Suponiendo que se toma en cuenta la analogía, sería preciso que las familias de predicados satisfagan alguna condición suplementaria. Igualmente en cuanto al orden, la interpretación del concepto formal de orden deberá ser tal que se trate de un orden real. Todas estas prescripciones son más fáciles de mencionar que de definir con precisión. De todas formas, no puede negarse su necesidad.

En estas condiciones, difícilmente se puede sostener que la teoría de la confirmación sea una doctrina de la inducción primaria. Esta afirmación sólo es verosímil en tanto se silencien los problemas de aplicación. Cuando se los aborda, aparece claramente que la validez de una asignación de probabilidad depende de la validez del conocimiento que comporta el lenguaje escogido como dominio de interpretación. Está siempre subordinada a hipótesis relativas a su rectitud. Pero es necesario ir más lejos y reconocer que estas hipótesis son difíciles de admitir. La aplicación de la lógica inductiva que propone **Carnap** depende de una extraña psicología asociacionista que ignora la fenomenología. El dominio en que se interpretan los enunciados formales es el de los nombres de los sense-data, como si la posesión de una cualidad sensible común tuviera un valor objetivo, fuera el signo de la posesión de una naturaleza simple idéntica. En realidad, se acepta sin crítica el conocimiento ingenuo vehiculado por el sentido común. Hay ahí una posición al menos extraña: para que los resultados de la lógica inductiva sean legítimos, para que el conocimiento científico pueda ser elaborado gracias a su utilización, a partir del conocimiento común, es preciso que estén justificadas las divisiones que instaura el lenguaje común. Pero si la experiencia común es correcta, el conocimiento científico es inútil, y si no lo es, sigue siendo imposible. La lógica inductiva no constituye, pues, en modo alguno, esa doctrina de la rectificación del conocimiento que sería necesaria para la comprensión de la ciencia y por ello no tiene utilidad. Así, a pesar de sus refinamientos técnicos, las teorías de la confirmación participan de las debilidades de todas las empresas positivistas: se fundan en el dogmatismo de un conocimiento que se pretende primero y que sólo lo es cronológicamente.

2. El uso de una lógica inductiva

Supongamos resueltos de modo satisfactorio los problemas concernientes a la aplicación de la lógica inductiva. Sería posible asignar probabilidades no sólo a las parejas de fórmulas, sino a las parejas de proposiciones. ¿Cómo se utilizarán estas asignaciones para constituir el cuerpo de enunciados que componen el conocimiento experimental?

Las probabilidades asignadas son relativas. Se puede atribuir a cada proposición tantas probabilidades cuantas elecciones posibles haya para el segundo argumento. ¿Qué probabilidad retener? Es evidente que es preciso excluir las relativas a datos conocidos como falsos. Los casos en que la evidencia es incierta serán tratados por aplicación del teorema de las probabilidades compuestas. Queda, pues, por elegir entre las probabilidades relativas a un segundo argumento que se sabe que es verdadero. El principio de la evidencia total elimina la indeterminación exigiendo mantener la probabilidad relativa al conjunto de nuestro conocimiento o, al menos, al conjunto de nuestro conocimiento relevante.

Procede hacer notar que este principio no es, en modo alguno, un resultado de la lógica inductiva, sino un principio que regula su uso. Es, pues, absurdo pedir una demostración de él en el interior de esta lógica, como hace **Ayer**[18]. ¿Es, por lo demás, necesario justificarlo? Se puede poner en duda: se presenta como un principio universalmente aceptado cuya validez puede ser tenida por una evidencia primera. Por el contrario, su aplicación plantea problemas, puesto que si no se quiere hacer inoperante la lógica inductiva, es preciso que se pueda limitar efectivamente el conocimiento relevante. La distinción entre factores relavantes y factores irrelevantes debe preceder, y no seguir, a la construcción de sistemas formales limitados. Es ella la que justifica que se traten ciertos problemas de lógica inductiva en un cuadro esquemático. Por eso no bastaría con una definición de la relevancia que siguiera a la construcción de una función de confirmación[19]. Pero la irrelevancia de un dato no es más que el resultado de una inferencia inductiva y debe ella misma ser confirmada. Si hay casos donde es fácil establecer la falsedad de una hipótesis de irrelevancia, no se puede estar seguro de su verdad. Cuando **Carnap** se limita a constatar que en la práctica se omiten ciertos datos "si su irrelevancia es plausible, aunque no esté actualmente comprobada"[20], esta afirmación encubre delicados problemas concernientes a la pertinencia de los sistemas de lógica inductiva relativos a lenguajes restringidos. El hecho de que la corrección de su aplicación dependa de la verdad de ciertas hipótesis que deben, ellas mismas, ser inductivamente establecidas aporta

---

[18] Citado por **Hempel** (C.) (*I.I.*, § 4) quien critica esta afirmación.

[19] **Carnap** propone la siguiente definición; la fórmula i es irrelevante en relación a la pareja $\langle h, e \rangle$ y a la función c si se tiene: $c(h, e) = c(h, e \,\&\, i)$ (*L.F.P.*, § 65, p. 348). Su estudio sistemático del concepto de relevancia le lleva a establecer resultados que, lejos de ser triviales, tienen a menudo un aspecto paradójico.

[20] *A.I.L.*, p. 139.

una nueva prueba de un resultado ya alcanzado: la teoría de la confirmación no es, en mayor grado que la teoría de la inferencia estadística, una doctrina de la inducción primaria.

Con independencia de lo que resulte de estas dificultades, el principio de la evidencia total resuelve, al menos virtualmente, el problema que habíamos planteado. Permite atribuir a las proposiciones una probabilidad que desempeñará el papel de probabilidad absoluta. La cuestión que queda por resolver consiste en determinar el uso que se hará de estas probabilidades.

La solución que inmediatamente viene a la mente consiste en introducir reglas que autoricen que se tengan por verdaderas ciertas hipótesis en razón de su probabilidad; las reglas de este tipo son llamadas *reglas de aceptación*. Se puede pensar simplemente en fijar un umbral: se decidirá aseverar en calidad de verdades experimentales las hipótesis cuya probabilidad sea superior a este umbral. O bien se introducirá la regla siguiente: en una familia completa de hipótesis, aseverar la hipótesis que tenga la probabilidad más fuerte[21].

¿Puede mantenerse alguna de estas dos reglas? La respuesta a esta cuestión exige que se determine lo que se puede esperar de una regla de uso. Es preciso, en primer lugar, que no permita la aserción simultánea de hipótesis contradictorias. Volvemos a encontrar aquí un problema ya mencionado varias veces, en particular en nuestro estudio crítico de la regla de inducción de **Reichenbach**[22]. Esta condición no es tan fácil de cumplir como podría creerse, incluso si se limita el conjunto de las hipótesis que pueden eventualmente ser aceptadas, no reteniendo, por ejemplo, más que "las que tienen forma de ley", es decir, las que se expresan por fórmulas universales. Una regla del primer tipo corre el peligro de fracasar ante este obstáculo. En cambio, es preciso evitar que en la totalidad de los casos, o en su enorme mayoría, no se mantenga ninguna hipótesis. Sería una mala solución la que sólo evita las antinomias con la ausencia de aserciones. Por ejemplo, en el sistema de las *Logical Foundations of Probability* en el que todas las leyes universales tiene un grado de confirmación nulo, no se podría aceptar una regla de uso que impusiera conservar todas las fórmulas que tienen un grado de confirmación superior a un umbral finito, y solamente ellas, y que excluyera de golpe todas las leyes universales.

Pero las reglas de uso deben satisfacer otras condiciones que tienen importantes consecuencias. En la medida en que permiten la inserción de ciertas hipótesis en el conocimiento experimental, llevan a legitimar ciertos tipos de acción, a saber, los que serían razonables si estas hipótesis fueran verdaderas. Un enunciado empírico sólo es válido si la hipótesis de su verdad no lleva a un tipo de acción que fracasa necesariamente. Ahora bien, sometidas a este criterio, las reglas de aceptación que hemos presentado manifiestan sus insuficiencias. Si hay circunstancias en las que tienen consecuencias aceptables, hay otras en las que incitan a efectuar elecciones

[21] Son las dos primeras reglas estudiadas por **Carnap** (*L.F.P.*, § 50, pp. 254-255).
[22] Cf. igualmente, cap. II, § 2.

desatinadas. Para establecerlo, basta con forjar la ficción de las apuestas sobre hipótesis cuya probabilidad es conocida por el apostante[23].

Estos resultados han incitado a afinar en la formulación de las reglas de aceptación. Puesto que las reglas de aceptación más simples manifiestan sus insuficiencias en los usos prácticos, se ha pensado que debía encontrarse la solución en una integración de elementos tomados de la teoría de la decisión en el interior de las reglas de aceptación. Así, se ha llegado a asimilar el problema de la aceptación de una hipótesis con un problema de decisión[24]. Hemos mostrado anteriormente que la teoría de la decisión estadística no constituye, por sí misma, una lógica inductiva, ni siquiera un modelo para la lógica inductiva. Pero, cualquiera que sean las dificultades previsibles, no se excluye *a priori* que algunos de sus conceptos y algunos de sus métodos desempeñen un papel en la solución de los problemas que nos preocupan. En la medida en que se trata de utilizar probabilidades relativas a un lenguaje definido, se satisface una de las condiciones requeridas para la aplicación de esta teoría: el campo de lo posible está cerrado puesto que se limita a las hipótesis que expresan las fórmulas de este lenguaje. ¿Quiere decir esto que las demás condiciones se satisfarán de igual modo?

En el problema planteado, se puede desdeñar el coste de la experimentación, pero es necesario definir una función de pérdida. Supongamos que se ha elegido una familia completa de hipótesis $(h_i)_{i \in I}$. Es necesario entonces definir una función f que aplique las parejas de índices en el conjunto de los reales. $f(i, j)$ medirá la ganancia si se acepta h_i cuando h_j sea verdadera. $f(i, j)$ será positiva si $i = j$ (es decir si la hipótesis aceptada es verdadera)[25]. Una vez determinada la función f, las reglas de aceptación podrán recibir una forma nueva. Se puede escoger la hipótesis que maximiza la esperanza de ganancia, o la que maximiza la ganancia mínima o sortear las hipótesis con probabilidades tales que se maximice la esperanza de ganancia mínima. Pueden, pues, proponerse las siguientes reglas:

1) Escoger i de tal modo que sea máxima la candidad $\sum_{j \in I} f(i, j)c(h_i, e)$.

2) Escoger i de tal modo que sea máxima la cantidad $\min_{j \in I} [f(i, j)]$.

3) Determinar la hipótesis que se mantendrá por un sorteo que atribuya a h_i la

---

[23] Cf. **Carnap** (R.) *L.F.P.*, § 50, pp. 254-256 y *P.R.*, pp. 972-973. A grandes líneas, el razonamiento de **Carnap** es el siguiente: la primera regla puede excluir la aserción de una hipótesis incluso si el error del primer tipo (que consiste en considerarla verdadera siendo falsa) es muy poco costoso, mientras que los otros tipos de error lo son. La segunda prohibe que nos aseguremos contra un daño, cualquiera que sea el precio de la póliza, si la probabilidad de sufrir el daño es inferior a 1/2.

[24] Es, especialmente, el punto de vista de **Braithwaite** (Cf. *S.E.*, cap. 8, pp. 255-292.)

[25] No diremos que $f(i, j)$ es negativa si $i \neq j$. No se excluye que la aceptación de una hipótesis falsa tenga consecuencias "positivas". Así sucede si es "muy cercana" a la hipótesis verdadera.

probabilidad p_i de tal modo que $\sum_{i \in I} p_i = 1$ y que $\sum_{i \in I} p_i \min_{j \in I} f(i, j)$ sea maximizada.

Reglas que corresponden respectivamente a las soluciones bayesianas y a las soluciones minimax con estrategias puras o estrategias mixtas en teoría de juegos. La primera ha sido propuesta efectivamente por **Carnap**[26]. Naturalmente, se plantea el problema de saber cuál se retendrá. Pero antes debe resolverse una cuestión mucho más delicada: ¿Cómo elegir la función *f*?

Es posible que en ciertas circunstancias se pueda dar un sentido preciso al concepto de función de pérdida. Así sucede cuando se conoce el uso que se hará del conocimiento adquirido: no se puede excluir que las circunstancias sean tales que se pueda determinar con precisión el coste de un error, que será el detrimento sufrido en razón de las elecciones desafortunadas que haya inspirado. Pero, si se trata de los problemas epistemológicos que plantea el conocimiento experimental, y no de problemas prácticos, la noción de coste de un error parece perder todo sentido preciso, como ya hemos dicho[27]. Incluso si se aceptara identificar el coste del error teórico con el de sus consecuencias prácticas, como no se pueden prever las aplicaciones prácticas del conocimiento científico, su determinación es imposible. Así, las modificaciones de las reglas de aceptación que se han propuesto parecen conducir a un callejón sin salida. Sin embargo no podemos abandonar esta vía antes de haber examinado un método propuesto por **Hempel** para determinar el coste de los errores teóricos[28]. Lo que hace posible un método semejante es, como se verá, la limitación del campo de lo posible.

La idea de **Hempel** es bastante sencilla. Supongamos que se sea capaz de medir el contenido de una proposición, la información que vehicula. La adición de una hipótesis verdadera tiene tanto más valor cuanto más contenido tenga. En las mismas condiciones, el error cometido será más grave si la hipótesis es falsa. Queda por precisar esta idea y, en primer lugar, escoger una medida del contenido. Para la solución de este problema, **Hempel** utiliza trabajos anteriores suyos[29] y diversos resultados de **Carnap** y de sus colaboradores[30]. Para simplificar la exposición, limitémonos a los lenguajes L^{π}. Es fácil determinar algunas propiedades formales de la idea de contenido: una fórmula lógicamente verdadera no aporta ninguna información sobre el estado del mundo, no tiene contenido. De modo general, el contenido de una fórmula disminuye cuando aumenta su rango. Las descripciones de estado son las que tienen un contenido más fuerte. Es lógico considerar que las fórmulas que aportan "elementos de contenido" son las negaciones de las descripciones de estado[31]. Toda fórmula se escribe en forma de una conjunción de elementos de conte-

---

26

27 Es la regla 5 de *L.F.P.* (§ 51, p. 269).

28 Cf. cap. 3, § 3.

29 **Hempel** (C.) y **Oppenheim** (P.): *S.L.E.*, § 9, pp. 167-173.

30 **Bar-Hillel** (Y.) y **Carnap** (R.): *S.I.*; **Carnap** (R.) *L.F.P.*, § 73, pp. 404-409.

31 Son los elementos que no son dominados más que por $\overline{1}$ en el álgebra de fórmulas.

nido que constituye su forma normal conjuntiva. Designemos por $C(\alpha)$ los elementos de contenido que están en la forma conjuntiva de α. Naturalmente las condiciones siguientes son equivalentes: $\beta \in C(\alpha)$ y $\sim\beta \in R(\sim\alpha)$. En definitiva, resulta que el concepto de contenido puede definirse utilizando los conceptos y los procedimientos duales de los empleados en la determinación de una medida lógica. En particular, se aplicarán las condiciones de simetría al conjunto de los elementos de contenido. Si está definida una medida lógica sobre un lenguaje, ello lleva a mantener como medida del contenido la función "cont" así definida.

$$\text{cont}(\alpha) = m(\sim\alpha) = 1 - m(\alpha).$$

Algunos autores se han detenido en esta definición[32]. Indiquemos que si β es conocida como verdadera (o supuesta como tal) la aserción de α aporta un contenido que no es cont(α), sino cont($\beta \supset \alpha$). Se introducirá el concepto del contenido de α relativo a β, que se designará por "cont(α/β)", lo mismo que se ha definido una probabilidad relativa. Se establecerá, pues:

$$\begin{aligned}\text{cont}(\alpha/\beta) &= \text{cont}(\beta \supset \alpha) = \text{cont}(\sim\beta \vee \alpha)\\ &= m(\beta \,\&\, \sim\alpha).\end{aligned}$$

Queda por determinar ahora una función de pérdida que mida la gravedad de los errores cometidos. Un procedimiento adoptado por **Hempel** le condujo a un resultado cuyo carácter decepcionante hace notar. La función de pérdida que retiene le lleva a adoptar la regla de aceptación siguiente: se mantendrá una hipótesis si y solamente si su probabilidad es, al menos, igual a 1/2.[33] Más que reproducir su razonamiento, adoptaremos otro proceder.

Supongamos que, sobre la evidencia e, se asevera h_i cuando h_j es verdadera. Una parte de la información introducida por la aserción de h_i es verdadera: la compuesta de los elementos de contenido comunes a $(e \supset h_i)$ y a $(e \supset h_j)$. La otra parte es falsa. No es insensato medir la ganancia de información teórica con la diferencia de estos dos contenidos. Calculemos la información verdadera: para que un elemento de contenido pertenezca, a la vez, a $C(e \supset h_i)$ y a $C(e \supset h_j)$ es necesario y suficiente que pertenezca a $C(e \supset (h_i \vee h_j))$.[34] Se puede, de este modo, determinar la función de pérdida $f(i, j)$:

---

[32] Señalemos que, a diferencia de los autores anteriores, **Kemeny** y **Oppenheim** definían así el concepto de "fuerza" de una proposición (*D.F.S.*, p. 322).

[33] *I.I.*, § 6.

[34] En efecto $\beta \in C(e \supset h_i)$ es equivalente a $\sim\beta \in R(\sim(e \supset h_i))$. Asimismo, $\beta \in C(e \supset h)$ es equivalente a $\sim\beta \in R(\sim(e \supset h))$. Si se dan unidas las dos condiciones, se tiene:

$$\begin{aligned}&\sim\beta \in R(\sim(e \supset h_i) \,\&\, \sim(e \supset h_j))\\ &\in R(\sim(e \supset (h_i \vee h_j))\end{aligned}$$

$$f(i, j) = \text{cont}(h_i \vee h_j/e) - [(\text{cont}(h_i/e) - \text{cont}(h_i \vee h_j/e)]$$
$$= 2\,\text{cont}(h_i \vee h_j/e) - \text{cont}(h_i/e)$$
$$= 2m(\sim (h_i \vee h_j) \,\&\, e) - m(\sim h_i \,\&\, e)$$

Dividiendo por el coeficiente de proporcionalidad $m(e)$, se obtiene la función $g(i, j)$ más cómoda de manejar:

$$g(i, j) = 2c(\sim (h_i \vee h_j), e) - c(\sim h_i, e)$$
$$= 1 + c(h_i, e) - 2c(h_i \vee h_j, e)$$

Se tiene, naturalmente: $g(i, i) = 1 - c(h_i, e)$.

Consideremos el caso en que las hipótesis sean incompatibles. Se tiene entonces $c(h_i \vee h_j, e) = c(h_i, e) + c(h_j, e)$ y si $i \neq j$, se tiene:

$$g(i, j) = 1 - c(h_i, e) - 2c(h_j, e)$$

Limitémonos al caso de una familia completa de hipótesis $(h_i)i \in I$. ¿Se puede, entonces, determinar la esperanza G_i de ganancia de información cuando se asevera h_i? Se tiene:

$$G_i = \sum_{j \in I} g(i, j)c(h_j, e)$$
$$= 1 - c(h_i, e) - 2 \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} c^2(h_j, e)$$
$$= \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} (c(h_j, e) - 2c^2(h_j, e))$$
$$= \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} (c(h_j, e) \cdot (1 - 2c(h_j, e))$$

Es preciso maximizar G_i. Pero es evidente que G_i no difiere de la misma suma ampliada a todos los índices de I sino por la ausencia de índice i. Se precisa, pues minimizar este término. Se llega, entonces, al siguiente resultado: si una hipótesis tiene una probabilidad superior a 1/2, aseverarla, si no, retener la hipótesis cuya probabilidad sea la más distante de 1/4. Además, se puede indicar que, en ningún caso, la ganancia de información es negativa: no se recomienda, pues, nunca, la ausencia de aserción[35].

[35] Estos resultados se obtienen por un cálculo muy sencillo. Respecto al primero, se estudian las variaciones de $x(1 - 2x)$ en el intervalo $[0, 1]$. El segundo deriva del hecho de que ninguna de las hipótesis que no se aseveran tiene una probabilidad superior a 1/2 y que las cantidades $c(h, e)$ y $1 - 2c(h, e)$ no son nunca negativas.

Este resultado puede parecer extraño, tanto más cuanto que la esperanza ligada a la aserción de una hipótesis depende del modo de agrupamiento de las restantes hipótesis. Es posible asegurarse con mucha facilidad del hecho de que varía si, por ejemplo, se agrupa junto a otras dos hipótesis de la familia completa. Por eso es difícil detenerse en esta primera regla. ¿Qué sucederá en las reglas de decisión minimax? La que corresponde a las estrategias puras vuelve a determinar a i de tal manera que se maximiza la cantidad $\min_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} (1 - c(h_i, e) - 2(h_j, e))$, es decir se minimiza

$$\max_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} (c(h_i, e) + 2c(h_j, e))$$

Del mismo modo, la que corresponde a las estrategias mixtas lleva a elegir entre las hipótesis por un sorteo que confiere a h_i la probabilidad q_i de tal modo que sea mínima la cantidad $\sum_{i \in I} q_i (\max_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} (c(h_i, e) + 2c(h_j, e))$ (con $\sum_{i \in I} q_i = 1$).

Nos falta comprobar estas reglas estudiando casos particulares. Supongamos que la familia se reduce a dos hipótesis h_1 y h_2. Las dos reglas que acabamos de proponer suponen simplemente elegir la hipótesis de más fuerte probabilidad, siendo indiferente la elección en el caso en que las dos probabilidades fueran iguales a 1/2. En el caso de tres hipótesis h_1, h_2, h_3, cuyos grados de confirmación son respectivamente p_1, p_2, p_3, con $p_1 < p_2 < p_3$, se obtienen resultados más sutiles. Según que se escoja h_1, h_2, h_3, la ganancia mínima es respectivamente $(1 - p_1 - 2p_3)$, $(1 - p_2 - 2p_3)$, $(1 - p_3 - 2p_2)$.[36] La primera regla impone escoger la más grande de las tres cantidades, es decir, la que tiene menor déficit con respecto a 1. Puesto que $p_1 < p_2$, se tiene $p_2 + 2p_3 > p_1 + 2p_3$, se excluye por tanto h_2. Se escogerá h_1 si se tiene $p_1 + 2p_3 < p_3 + 2p_2$. Esta condición se expresa del modo siguiente:

$$\begin{aligned} p_1 + 2p_3 &< p_3 + 2(1 - p_1 - p_3) \\ 3(p_1 + p_3) &< 2 \\ p_1 + p_3 &< 2/3 \end{aligned}$$

o

$$p_2 > 1/3$$

En cambio, si $p_2 < 1/3$, se escoge h_3.[37]

[36] Ello resulta, de modo inmediato de la matriz

$$\begin{array}{lll} 1 - p_1 & 1 - p_1 - 2p_2 & 1 - p_1 - 2p_3 \\ 1 - p_2 - 2p_1 & 1 - p_2 & 1 - p_1 - 2p_3 \\ 1 - p_3 - 2p_1 & 1 - p_3 - 2p_2 & 1 - p_3 \end{array}$$

y de las condiciones impuestas respecto al orden de p_1, p_2, p_3.

[37] De modo más general, si se tienen clasificadas n hipótesis según el orden del grado de confirmación, se elegirá entre las hipótesis extremas.

Por medio de un razonamiento paralelo, la regla correspondiente a las estrategias mixtas requiere que se atribuyan respectivamente a h_1, h_2, h_3, probabilidades q_1, q_2, q_3, con $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, tales que sea mínima la cantidad

$$q_1(p_1 + 2p_3) + q_2(p_2 + 2p_3) + q_3(p_3 + 2p_2)$$

lo que supone elegir q_1 y q_3 para que sea mínima $q_2(p_2 - p_1) + q_3\ (3p_2 = 1)$.

Se elegirá, pues, $q_2 = 0$ (puesto que $p_2 - p_1$ es positivo) y $q_3 = 0$ ó $q_3 = 1$ según que $3p_2 - 1 > 0$, es decir, $p_2 > 1/3$, o que $3p_2 - 1 < 0$, es decir $p_2 < 1/3$. Se vuelve a obtener, por tanto, el resultado precedente, estando degeneradas las estrategias mixtas mantenidas. Estos resultados son decepcionantes y las reglas obtenidas, extrañas. En el caso de tres hipótesis, supongamos que h_2 tiene un grado de confirmación igual a 0,4. Se pide aseverar la hipótesis que tenga el grado de confirmación más débil, cualquiera que sea, aunque fuera igual a 10^{-10}. Además, la ganancia mínima de información es negativa en todos los casos y la regla minimax justificaría que no se establezca ninguna aserción[38]. Conclusión en consonancia con la significación intuitiva del principio minimax: el mejor modo de no caer en el error es no afirmar nada.

En la ocasión presente, la clausura del campo de lo posible, la limitación a un conjunto definido de enunciados concernientes al mundo –en este caso, a un universo de discurso restringido y especificado de antemano– han permitido una aplicación de los conceptos de la teoría de la decisión a un problema de epistemología de la inducción. Estas hipótesis son, en sí mismas, criticables y la necesidad de admitirlas prueba superabundantemente que la teoría de la confirmación sólo concierne a la inducción secundaria. De todos modos, el intento de derivar las reglas de aceptación a partir de los principios de la teoría de la decisión no ha concluido. Ciertamente, no se excluye que otros métodos, en particular otras medidas de contenido y, por tanto, otras funciones de pérdida, ofrezcan resultados más aceptables. Pero se debe reconocer que han fracasado los procedimientos más directos.

En razón de estas dificultades, se ha pensado que se podía cambiar la forma de las reglas de uso y sustituir las reglas de aceptación por reglas de tenacidad[39]. Mientras que las primeras determinan en qué condiciones está permitida la introducción de una hipótesis en el cuerpo de los enunciados científicos, las segundas fijan las condiciones de su mantenimiento, una vez que se ha aseverado. Por ejemplo, se decidirá mantener una hipótesis en tanto que su grado de confirmación no caiga por debajo de un determinado umbral. Está claro que las reglas de este tipo no pueden ser suficientes como reglas de uso. Es necesario añadirles otros enunciados que indiquen, por ejemplo, que las hipótesis son examinadas en un orden determinado

[38] A excepción de los casos en que dos hipótesis tengan el mismo grado de confirmación, en cuyo caso se debe retener la tercera.

[39] Cf. **Putnam** (H.): *D.C.I.*, p. 772.

y que se mantendrá la primera que no resulte excluida por las reglas de tenacidad. En general, el orden adoptado será el de la simplicidad decreciente. Pero las esperanzas fundadas en las reglas de tenacidad han quedado frustradas. En primer lugar, se tropieza con las dificultades concernientes a la definición de un orden de la simplicidad[40]. Además, es evidente que las reglas de tenacidad deben satisfacer el siguiente requisito: toda hipótesis que sea verdadera debe ser introducida al término de un proceso que comporta un número finito de observaciones y no ser excluida ya. Ahora bien, **Carnap** construyó un contraejemplo que prueba que las reglas propuestas sólo satisfacen esta condición en ciertos casos[41]

Un abismo separa la atribución de una probabilidad a una hipótesis de su inserción en el saber científico. Corresponde a las reglas de uso llenarlo. Pero no se ha sabido encontrar una formulación plenamente satisfactoria de estas reglas. ¿Quiere decir esto que no tiene solución el problema del uso de la lógica inductiva? No nos atrevemos a afirmarlo, pero se debe reconocer que sigue estando sin resolver.

3. Los métodos inductivos y la justificación de la inducción

Uno de los méritos de la teoría de la confirmación es permitir poner entre paréntesis provisionalmente los problemas relativos a la justificación de la inducción. En tanto que nos acantonemos en una perspectiva formal, las únicas exigencias a respetar son las de la no contradicción. Basta, para "justificar" una lógica inductiva, aportar una prueba de su consistencia. A lo sumo, se puede pedir que no se invaliden ciertos principios intuitivamente evidentes que hemos tratado de enumerar. También es necesario precisar que el acatamiento de estos principios sólo se impone porque se tiene la intención de integrar la lógica inductiva en un método inductivo y de ofrecer a través de ella una imagen de las prácticas inductivas admitidas corrientemente.

En cambio, consideremos un método inductivo, es decir, una lógica inductiva acompañada de sus reglas de aplicación y de sus reglas de uso. Este método funcionará de tal modo que permita la inserción en el saber científico de ciertas proposiciones cuya verdad no garantiza la experiencia. Se plantea, entonces, el problema de su justificación.

Pero, ¿en qué puede consistir esta justificación? Se sabe, desde **Hume**, que es imposible probar demostrativamente que las conclusiones inducidas no serán invalidadas por la experiencia. Si se identifica justificación y validación, "toda justificación iría contra la famosa argumentación de **Hume**"[42]. Se reconoce ampliamente lo bien fundado de este argumento: sin embargo llega a tomarse como pretexto para afir-

[40] Se podría retomar la crítica que **Katz** dirige a la doctrina de **Kemeny** quien, tácitamente, utiliza el concepto de regla de tenacidad (Cf. cap. 8 § 2).

[41] *P.R.*, pp. 984-986.

[42] Cf. **Kemeny** (J.): *C.P.I.*, pp. 711-755.

mar que no se plantea el problema de la justificación de la inducción. Pero una cosa es decir que un problema no tiene solución y otra decir que no es más que un seudo-problema.

Es cierto que no se puede estimar un método científico como justificado en razón del solo hecho de que expresa la práctica científica. Tal es, sin embargo, la solución propuesta algunas veces: en lugar de concluir en el escepticismo, como lo hacía **Hume**, se refugian en el dogmatismo. **Carnap** adopta esta posición. Así, en *The aim of inductive logic,* concluye que es "racional" y "válido" un método inductivo del que se ha probado que es conforme a las exigencias del espíritu científico. Sería algo ingenuo extrañarse de que **Carnap** recurra al argumento positivista tradicional. Pero se debe constatar que esta posición es insostenible y que el propio **Carnap** debe reconocerlo. Ante todo, parece que la confianza puesta en la práctica científica implica el uso de un argumento inductivo que cae directamente bajo el golpe de la condenación humeana: se legitima la confianza que se otorga a la ciencia en razón de sus éxitos pasados. Hay textos, en particular los de **Nagel**[43], que son verdaderas confesiones en esta materia.

Pero, además, es imposible invocar el consenso científico como norma suprema de racionalidad cuando el análisis formal ofrece la imagen de un consenso quebrado. Supongamos, en efecto, que se ha fijado como único fin la codificación de los métodos inductivos utilizados en el pensamiento científico. Uno de los resultados esenciales es establecer que, en ciertas circunstancias, no hay un método único, conforme a los cánones del pensamiento científico, sino todo un espectro de métodos. Así sucede con el sistema de las funciones λ. Ningún argumento permite establecer que una de ellas es conforme a los usos científicos mientras que las otras no lo son. La idea de un consenso científico en este asunto sería, pues, una ilusión resultante de un análisis insuficiente. Los métodos inductivos admitidos en la práctica científica no tienen la nitidez que se les prestaba gratuitamente. En consecuencia, independientemente de cualquier otra razón, no se puede invocar como argumento justificativo la conformidad con los usos científicos establecidos, pues quedaría sin resolver el problema de la elección entre métodos inductivos que conduzcan eventualmente a predicciones divergentes. Al mismo tiempo se excluyen los tipos de justificación que suponen probar simplemente que los métodos inductivos, cuando se reitera su aplicación, conducen a predicciones verificadas por la experiencia.

El problema de la inducción se plantea, pues, bajo una forma que ya conocemos; del mismo modo que conocemos las dificultades encontradas en su solución: probar

[43] Según **Nagel**, todo método inductivo requiere una justificación. Pero ¿qué ha de entenderse por justificación? Si está justificado el método que consiste en inferir de la muestra a la población es porque la experiencia demuestra que lleva a resultados estables. El privilegio concedido a la encuesta científica descansa sobre una hipótesis, a saber, que dicha encuesta proporciona predicciones más exactas que cualquier otro método. Nuestra "experiencia general" justificaría esta hipótesis (cf. *P.T.P.*, § 8). Igualmente, los métodos inductivos particulares se justificarían uno a uno "por la tasa de éxitos *de facto*" asociada a su uso (cf. *C.T.I.*, p. 824). Se aprecia cómo este autor utiliza la regla de **Reichenbach** para justificar la inducción.

que un método inductivo es preferible a otros. Quisiéramos establecer que las doctrinas de la inducción fundadas sobre la teoría de la confirmación no están más capacitadas para resolver este problema de lo que lo estaba la doctrina de **Reichenbach**. A fin de simplificar nuestra exposición, nos limitaremos a los problemas de elección entre las funciones λ. Una solución general del problema planteado debería aportar una respuesta a esta cuestión. Si queda sin resolver, es la prueba de que el problema general también lo está.

Pero ¿qué se quiere decir cuando se afirma que un método inductivo es preferible a otro? La primera dificultad consiste en dar un sentido a esta expresión. Puesto que no se trata de exigir que un método inductivo no conduzca nunca a predicciones invalidadas por la experiencia, se deben utilizar los conceptos probabilitarios para medir su tasa de éxitos. En *Logical foundations of probability*[44], **Carnap** definía así la idea de éxito de un método inductivo: un método inductivo obtiene buen éxito si, en una serie de apuestas sobre hipótesis, el balance es positivo, cuando esas apuestas tienen cocientes inferiores a los grados de confirmación de esas hipótesis. Esta condición es equivalente a la siguiente, llamada "principio de uniformidad del mundo": "Si la frecuencia de una propiedad en un largo segmento inicial de una serie es suficientemente elevada, lo será probablemente en una continuación de esta serie suficientemente larga". No se puede estar seguro de estos enunciados pero, al menos, se puede establecer demostrativamente que tienen una probabilidad elevada[45]. Dicho con más precisión, si la serie de apuestas es suficientemente larga, es extremadamente probable que el balance sea positivo. **Carnap** concluye de ahí que se puede justificar un método inductivo sin presupuesto, es decir, sin suponer la verdad de una proposición sintética que la experiencia es incapaz de garantizar.

Tal razonamiento es calificado de justificación "interna" de un método inductivo. Expresión púdica para decir que es circular. ¿Qué se ha probado exactamente? Nada más que esto: la estimación en media c del balance de una serie de apuestas del tipo precedente es positiva. Resultado trivial que establece quizás la coherencia de los métodos inductivos, pero que no constituye en modo alguno una justificación, puesto que no puede servir para resolver el problema de la elección entre métodos inductivos. La prueba de ello está en el hecho de que el mismo razonamiento

---

[44] *L.F.P.*, § 41, pp. 177-182.

[45] ¿Puede hablarse del grado de confirmación de un principio que justifica la elección de un método inductivo? Este principio pertenece a la metalengua y no se excluye que los procedimientos utilizados por **Carnap** para transcribir la semántica en el lenguaje-objeto sean insuficientes para permitir su traducción a este lenguaje. De hecho, no hay nada de eso: el uso del concepto de estimación en media c permite dar un sentido estricto a los conceptos introducidos: sea $f(u)$ una función de un argumento u cuyos valores posibles, cuando e es verdadero, son $r_1, \ldots, r_n$. $h_1, \ldots, h_n$ son las hipótesis que establecen que $f(u)$ es respectivamente igual a $r_1, \ldots, r_n$. La estimación en media c de f está dada por $\sum_{p=1}^{n} r_p \cdot c(h_p, e)$.

puede aplicarse a métodos inductivos diferentes, como ha mostrado **Burks**[46]. Tomemos en consideración tres medidas simétricas m^*, m^+, $m^\diamond$ definidas sobre los lenguajes L de la manera siguiente. Sea $\mathscr{Z}$ una descripción de estado, $n_{\mathscr{Z}}$ el número de descripciones de estado isomorfas con $\mathscr{Z}$; se establece $m^*(\mathscr{Z}) = k_1/n_{\mathscr{Z}}$, $m^+(\mathscr{Z}) = k_2$, $m^\diamond(\mathscr{Z}) = k_3/n_{\mathscr{Z}}$, escogiendo k_1, k_2, k_3 de tal modo que para todas las medidas se tenga $m(t) = 1$. Los grados de confirmación correspondientes son c^*, c^+, $c^\diamond$. c^* es la función de **Carnap**, c^+ la de **Wittgenstein**, $c^\diamond$ una función llamada "inversa" cuyo uso lleva a considerar una propiedad tanto menos probable cuanto más frecuente ha sido en una muestra observada. Para cada uno de estos métodos se puede establecer que la estimación en media c del balance de una serie de apuestas es positiva si los cocientes son inferiores a los grados de confirmación de las hipótesis, siendo los grados de confirmación y estimación en media c relativos a la misma función. Para cada una se puede encontrar un presupuesto que la justifique, en el sentido de que su verdad garantiza su éxito, y al cual ella confiere un alto grado de confirmación. Ante estas decisivas críticas que **Burks** reiterará[47], **Carnap** no podrá mantener su punto de vista. Deberá reconocer que es equivocado creer encontrar en tal argumentación "una solución del problema tradicional de la justificación de la inducción" y confesar que los textos se prestaban al equívoco[48].

Es pues necesario encontrar otra definición del éxito de un método inductivo si se quieren evitar las argumentaciones circulares. En *The continuum of inductive methods,* **Carnap** adopta un nuevo procedimiento: para definir la eficacia de un método inductivo, se sirve de algunos conceptos de la teoría de la inferencia estadística[49].

Supongamos que las funciones c se utilizan para determinar la frecuencia relativa de una propiedad M en el universo de L_n^π tras el examen de una muestra de tamaño s. Supongamos conocida la descripción de estado que es verdadera. Es entonces posible determinar la probabilidad de que una muestra de s objetos contenga s_M objetos que tienen la propiedad M: se trata de un problema de inferencia directa cuya solución es independiente de la función c mantenida, con tal que se limite a las funciones c simétricas. Por tanto, se puede determinar la probabilidad de que el uso de una función particular brinde tal estimación de la frecuencia de M. Será posible, pues, definir sin temor de circularidad el error-cuadrático medio de la estimación de la frecuencia relativa de M cuando se aplica la función c a muestras de s objetos. Este error depende:

1) de la función utilizada, es decir, de la elección de λ,

2) del tamaño de la muestra,

3) de la propiedad M considerada,

4) de la descripción de estado que es verdadera.

---

[46] *P.T.I.*, § 3.
[47] Cf. *C.S.I.*, especialmente, pp. 751 y 756-758.
[48] *P.R.*, p. 982.
[49] Toda la segunda parte de la obra está dedicada a la solución de este problema.

Designémoslo por $\omega^2(\lambda, s, M, \mathscr{Z})$. Es natural tomar como medida del éxito de un método inductivo la medida $\omega^2(\lambda, s, \mathscr{Z})$ de $\omega^2(\lambda, s, M, \mathscr{Z})$ cuando M recorre el conjunto de las propiedades Q: la mejor función corresponde naturalmente al mínimo de esta cantidad.

Carnap puede establecer el importante resultado siguiente: sea n_i el número de individuos que son Q_i; establezcamos $r_i = n_i/n$, el conocimiento de $h = \sum_{i=1}^{k}$ basta para determinar el mejor método inductivo y encontramos que es independiente del tamaño de la muestra. Se debe elegir $\lambda = \dfrac{1-h}{h-1/k}$.[50] Por lo demás, es importante hacer notar que h tiene su máximo ($h = 1$) cuando uno de los r_i es igual a 1, es decir, cuando todos los individuos tienen el mismo predicado Q, y su mínimo ($h = 1/k$) cuando las descripciones de estado atribuyen a un número igual de individuos cada uno de los predicados Q. En otras palabras, h mide de alguna manera el grado de homogeneidad de la descripción: h crece con la similitud de los objetos nombrados en L_n^π. A los dos casos extremos corresponden respectivamente los métodos definidos por $\lambda = 0$ y $\lambda = \infty$, es decir, el método de **Reichenbach** y el de **Wittgenstein**. Es preciso indicar que, en general, el método que minimiza el error-cuadrático medio es un método sesgado[51].

Los resultados obtenidos son de una extrema importancia. No se apoyan, en modo alguno, sobre el estudio del comportamiento asintótico de las funciones-c, sino sobre el análisis de sus resultados en el dominio de lo finito. Medir la eficacia de un método por la medida de los errores-cuadráticos medios cometidos en las estimaciones de las frecuencias de los predicados Q es sólo una convención, pero una convención razonable. La argumentación, como hemos señalado, no es en absoluto circular, puesto que la determinación de esta cantidad y de la función c que la minimiza no depende de la elección previa de una función c. Se sabe, pues, que el conocimiento de h basta para determinar el mejor método inductivo; recíprocamente, si suponemos conocido el mejor método inductivo, se puede concluir de él el valor de h. Es decir, por vez primera se ve aparecer un auténtico principio de la inducción. Un enunciado que especifique el valor de h justifica efectivamente la elección de un método inductivo, e, incluso, se puede afirmar que todo enunciado que justifica un método inductivo equivale a esta especificación.

Pero, ¿quiere decir esto que **Carnap** ha encontrado efectivamente una justificación de la inducción? Nada de eso, puesto que el conocimiento de h está fuera de nuestro alcance. Es más, se ha probado que toda justificación de un método inductivo implica el conocimiento de una propiedad que pertenece al universo tomado en

[50] *C.I.M.*, § 21.

[51] *Ibid.*, § 22. Entre las funciones de la primera especie, únicamente no está sesgada la función de **Reichenbach.**

su conjunto. Pero si la inducción es necesaria ello prueba, precisamente, que sólo se conoce por experiencia un fragmento de este universo. Extrapolando el resultado obtenido, que concierne únicamente a las funciones λ y al universo de discurso L_n^π, se llegaría a admitir que la constitución de la física depende de la elaboración de una cosmología. En otras palabras, el resultado obtenido, lejos de ser una justificación de la inducción, muestra la imposibilidad de dicha justificación. Sólo ha sido resuelto el problema formal que consiste en determinar el principio que justificaría un método inductivo particular. No se ha propuesto ninguna justificación de este principio. El único uso positivo de este resultado consiste en la exclusión, autorizada en algunos casos, de *ciertos* métodos inductivos[52]. **Carnap** lo reconoce ampliamente cuando escribe: "Situando el problema como cuestión lógica, nos abstendremos de todo juicio sobre el éxito de un método inductivo en el mundo actual. Un juicio de esta clase es claramente imposible desde un punto de vista inductivamente neutro"[53].

Ante la imposibilidad de resolver el problema planteado, **Carnap** llega a considerarlo una cuestión práctica; entendamos por ello que la elección de un método inductivo sería un simple asunto de decisión, que no puede calificarse de "verdadero" o de "falso"[54], ni tratarse en el interior del formalismo. En esta oposición entre cuestiones teóricas, internas a los formalismos, y cuestiones prácticas, simples problemas de decisión, **Burks**[55] ha visto una aplicación al problema de la inducción de la distinción entre cuestiones internas y cuestiones externas que **Carnap** había presentado en su célebre artículo *Empiricism, semantics and Ontology*[56].

Oponiéndose a las restricciones que los nominalistas pretenden imponer a la construcción de los sistemas formales, **Carnap** distinguía dos sentidos del concepto de existencia cuando se aplica a entidades conceptuales; la existencia de una entidad puede ser una simple cuestión interna al formalismo en el sentido de que se establezca en él que tal aserción de existencia no es allí contradictoria. O bien se pregunta si el sistema formal tomado como un todo existe; pero entonces el problema no es de ningún modo saber si existen realidades actuales nombradas en el sistema; se trata de una simple cuestión práctica que consiste en determinar si es útil tomar en consideración tal sistema formal particular. En suma, la construcción de un

---

[52] Supongamos finito y conocido el número de los objetos que L_n^π contiene. Si en una muestra se encuentran representadas diversas clases de objetos (dicho de otro modo, si todos los objetos no poseen el mismo predicado Q) se puede concluir de ello que el universo no es homogéneo, incluso acotar superiormente su grado de homogeneidad. Al mismo tiempo resultan excluidos los métodos inductivos que corresponden a valores de λ demasiado débiles. En un universo finito, la observación de dos objetos que difieran al menos en una propiedad basta para excluir que se tenga $h = 1$ y, por tanto, para condenar el método de **Reichenbach** (cf. *C.I.M.*, § 24).

[53] *C.I.M.*, § 20.

[54] *C.I.M.*, § 18, p. 53.

[55] *C.S.I.*, pp. 752-753.

[56] Cf. *M.N.*, pp. 204-221, en el que se reproduce este artículo inicialmente publicado en 1950.

sistema formal no implica en modo alguno la adhesión a una ontología particular.

Esta distinción entre cuestiones internas a los formalismos, únicas cuestiones teóricas, y las cuestiones externas, reducidas a problemas prácticos, parece volver a encontrarse en *The continuum of inductive methods*. Pero **Burks** critica que se aplique al problema de la elección entre métodos inductivos: aunque externo en relación con cada método, este problema no puede ser zanjado por una elección arbitraria. Acerca de la validez de la exégesis, del interés de la aproximación, **Carnap** está plenamente de acuerdo. Pero mantiene su tesis: la elección de un método inductivo es una cuestión externa con respecto a los formalismos y, al mismo tiempo, una cuestión sin contenido teórico[57]. A decir verdad, su defensa no es más que la reafirmación dogmática de su tesis a la que su adversario ha dado una forma particularmente neta.

No criticaremos la argumentación de *Empiricism, semantics and ontology*. Sin embargo, de acuerdo con **Burks**, creemos que no se aplica en el caso presente. El problema de la elección de un método inductivo no es una cuestión práctica, "sin contenido teórico". Cierto que, en rigor, una elección no puede calificarse ni de verdadera ni de falsa. Pero escoger un método es afirmar implícitamente que es el más eficaz. Si la elección no tiene contenido teórico, la afirmación de su racionalidad sí lo tiene. La prueba está en que el propio **Carnap** ha podido determinar el principio que justificaría tal método inductivo particular. Si se tiene derecho a construir arbitrariamente sistemas formales de lógica inductiva, esto no significa que sea racional adoptar cualquiera de estos sistemas para constituir el conocimiento experimental. Además el mismo **Carnap** reconoce que un método inductivo que condujera a malas predicciones sería abandonado como un instrumento ineficaz, que se ensayaría otro método. De ello concluye que no hay "ni conocimiento absolutamente cierto a propósito del mundo, ni método absolutamente perfecto para actuar en el mundo"[58]. Sorprendente retorno a la regla de **Reichenbach**, que ha sido, sin embargo, ampliamente criticada, y que, en este caso, sirve implícitamente para juzgar la eficacia de un método inductivo. Pero, sobre todo, confesión de que el problema de la elección entre los métodos inductivos se plantea realmente y que no está en modo alguno resuelto.

En el aspecto formal, la teoría de la confirmación era demasiado limitada y poco satisfactoria. Cuando se intenta dar una forma precisa a los métodos inductivos que se fundan en ella, los obstáculos se multiplican. Hemos debido renunciar a ver en ella una teoría de la inducción primaria. Acabamos de constatar que no puede contribuir a resolver el problema de la justificación de la inducción. Es más, el análisis formal ha evidenciado que el planteamiento de este problema no es privativo de una reflexión filosófica que ponga en duda el saber científico. La cuestión de elegir entre métodos inductivos, de la que se ha podido decir que era la forma moderna

[57] *P.R.*, p. 982.
[58] *C.I.M.*, § 18, p. 54.

del problema de **Hume**, se presenta como un auténtico problema cuya solución se requiere para la elaboración del saber científico. Lejos de aportar las respuestas que de ellas se esperaban, las investigaciones técnicas han probado que las cuestiones planteadas eran auténticos problemas y que quedaban sin respuesta.

Puede parecer extraño que, nacidas de un proyecto filosófico, estas investigaciones hayan sobrevivido al abandono más o menos consciente de este proyecto, que continúen siendo cultivadas cuando se descubre que eran vanas las esperanzas puestas en ellas. La razón de ello es clara: la habilidad de los que las practican ha dado lugar a desarrollos formales complejos. Se han resuelto problemas, se han planteado otros. Ahora bien, una ciencia vive de las cuestiones que engendra. Incluso si usurpa su nombre, la lógica inductiva tiene derecho a la existencia en tanto que ciencia formal. Sólo hemos querido someter a crítica las pretensiones filosóficas que demasiado a menudo se esconden tras sus áridos desarrollos.

CONCLUSION

Se había creído ver, en la teoría de probabilidades, un instrumento privilegiado para la elaboración de una lógica del conocimiento inductivo. Esta idea, ampliamente extendida y a fin de cuentas seductora, difícilmente resiste la prueba de los hechos. Hasta hoy en día, a pesar de los esfuerzos desplegados, permanece todavía sin construir la lógica inductiva probabilitaria. Ninguno de los sistemas propuestos contienen principios seguros sobre los que se pueda esperar edificarla. Ni siquiera se han podido establecer los rudimentos de esta disciplina. Sin temeridad, se puede inferir de los análisis precedentes que la ausencia de una lógica inductiva no es un fracaso momentáneo resultante de la insuficiencia de la investigación, sino el signo de su imposibilidad radical. Así se condena el proyecto positivista de absorber toda teoría de la ciencia en una epistemología formal y de consagrar la lógica como ciencia de la ciencia.

Pero los resultados que hemos establecido parecen llevar más lejos: se sabe que sirven de argumentos para un convencionalismo escéptico. Si es imposible definir una probabilidad que mida la confianza que se puede otorgar a las conclusiones inducidas, no hay, se dirá, ningún criterio que permita distinguir las que deben aceptarse. Con la condición de que salven los fenómenos, es decir, que no sean refutadas por los datos, las leyes experimentales son igualmente dignas de ser aseveradas y el privilegio concedido a algunas de ellas no puede fundamentarse si no es, en rigor, sobre criterios extrínsecos. El conjunto del conocimiento experimental aparece entonces como el fruto de lo arbitrario. Además, de paso, nuestro estudio nos ha llevado a mostrar que los conceptos cardinales del análisis estructural del conocimiento inductivo, como los conceptos de confirmación, de simplicidad, de variedad, no pueden recibir una definición formal satisfactoria. Parece que no sólo no se puede validar el conocimiento inductivo, sino que ni siquiera se puede describirlo en forma pertinente. A primera vista, la crítica de la lógica inductiva desemboca en un vacío epistemológico.

Es inquietante que se esté en condiciones de inferir tales consecuencias a partir de los resultados que hemos establecido. El hecho de que sean contrarios al buen sentido, el temor a quedar reducidos a las epistemologías convencionalistas de conocida pobreza, incitarán a poner en tela de juicio nuestros análisis. Además, el favor del que ha gozado la lógica inductiva deriva esencialmente de que se presenta como la única defensa contra le escepticismo. Es, pues, necesario establecer que su ausencia no hace al conocimiento experimental ni ilegítimo, ni incomprensible. Lo proba-

remos poniendo de evidencia los presupuestos implícitos en el análisis positivista. La crítica de los principios sobre los que reposa nos permitirá, simultáneamente, demostrar que la lógica inductiva no sólo no existe de hecho, sino que es imposible de derecho, e indicar que su ausencia no condena al epistemólogo al silencio cuando aborda los problemas del conocimiento experimental.

Imputar el fracaso del positivismo lógico al proyecto de someter a un análisis exclusivamente formal a una ciencia que no lo es, es una solución por lo menos insuficiente. Es preciso también mostrar lo que, en el conocimiento experimental, escapa por naturaleza al análisis formal. Nuestra respuesta será la siguiente: al privar al conocimiento experimental de su dimensión histórica, al repudiar todo análisis "subjetivo", el positivismo lógico impide de entrada todo acceso a su comprensión y debe necesariamente enredarse en complicadas dificultades.

Es sabido cómo el rechazo a hacer concurrir la "pragmática" con la epistemología es una tesis explícita de los autores de que hemos hablado. El análisis del saber se desarrolla de tal modo que se desvincula de sus modos de adquisición. Por emplear una fórmula manida, digamos que se toma en consideración una ciencia completamente hecha y no una ciencia en proceso de construcción. Ciertamente, nadie pretende negar que haya una evolución del conocimiento experimental, que atraviesa sucesivamente diferentes etapas y permanece inacabado. Pero estos caracteres son tratados como si fueran accidentales. Así, se estimará la validez de una hipótesis independientemente de toda consideración sobre su situación en el conjunto del desarrollo histórico del conocimiento científico, sobre los pasos que han llevado a su aserción. Se confundirá con una probabilidad que se determina por una relación entre dos proposiciones intemporales. Este poner entre paréntesis no debe extrañarnos; es el necesario correlato de la intención formalizadora: los sistemas formales se presentan como totalidades cerradas en las que no subsiste ningún vestigio de su pasado y el conocimiento de dicho pasado no añade nada a su comprensión. Pero todo el problema consiste en saber si es legítimo. Basta con describir algunas consecuencias que derivan necesariamente de ello para apercibirse de que no lo es.

La mejor manera de negar la historia es totalizarla. El positivismo procede así. La posibilidad de integrar en un mismo formalismo datos que pertenecen a niveles muy distintos del conocimiento científico no se pone nunca en duda. Desde el momento en que nuestros autores abandonan el dominio de las investigaciones parciales, no dudan en razonar sobre tales ficciones. Por ejemplo, se fingirá que se transcriben en fórmulas de un único lenguaje formal todos los datos de hecho, presentes, pasados y futuros, y todas las hipótesis científicas, las que no han sido aceptadas, las que son desmentidas por la experiencia, las que no han sido concebidas y no lo serán nunca, tanto como las que pertenecen al cuerpo del saber científico actualmente admitido. De este modo toda la ciencia, que sólo se ofrece fragmentaria y progresivamente a la humanidad pensante, es concebida por el epistemólogo como presente, objeto de un solo pensamiento.

Naturalmente, se llega a atribuir a esta ciencia un origen y un fin absolutos. El origen hay que buscarlo por el lado del conocimiento perceptivo en el que el positivismo debe fijarse. Se supondrá, pues, que los datos se expresan bajo la forma de enunciados protocolarios que pertenecen al lenguaje de observación cuyo vocabulario podría determinarse de una vez por todas, si no de hecho, al menos de derecho. No se considera en absoluto significativa la arbitrariedad en la delimitación del vocabulario e, incluso, en la morfología del lenguaje de observación. No se toma en consideración el hecho de que se pueda poner en cuestión la categorización que establece un lenguaje de observación determinado. Se supone que, sin referirse a una perspectiva epistemológica particular, a una intención de conocimiento determinada, es posible discriminar cuáles son los enunciados protocolarios que expresan el conocimiento perceptivo y constituyen la base de todo conocimiento experimental. Si el positivismo utiliza tales hipótesis es porque tiene necesidad de suponer *un* conocimiento *primero*, origen de todo conocimiento de la naturaleza. Del mismo modo, no duda en tratar la ciencia acabada como un objeto de pensamiento epistemológico, tal como aparece mediante la ficción del lenguaje de la ciencia.

A través de este rechazo de la historicidad científica se adivina la voluntad de excluir toda epistemología de "orientación subjetiva". Se analiza el conocimiento sin tomar en cuenta que es conocimiento para un sujeto. La percepción es tratada como un "acontecimiento de la naturaleza" y se engloba el conocimiento experimental en los elementos de formalismos muertos cuyo estudio se emprende independientemente de las intenciones de conocimiento que presiden su constitución y utilización. Se prohibe la referencia a la "vivencia epistemológica". No se emplean nunca nociones tales como evidencia, interés y tema. La descripción de las orientaciones de la conciencia científica, con los resultados que de ella derivan en el modo de recortar los fenómenos, la distinción entre lo que está admitido y lo que permanece como objeto de crítica, la elección de una perspectiva sobre el saber científico que se exprese, por ejemplo, en el privilegio concedido a ciertos formalismos considerados centrales, todo ello se silencia.

Sería algo ingenuo extrañarse de que el análisis positivista excluya toda investigación transcendental y de que su estilo esté en las antípodas de una epistemología fenomenológica de la que la pragmática podría proporcionar una versión debilitada. El método escogido está en conformidad con los imperativos de una filosofía para la que la subjetividad es sólo un fenómeno de la naturaleza del que la ciencia debe dar cuenta. En definitiva, es el naturalismo profesado por los positivistas el que les impone el modo de análisis que han adoptado. Pero era importante mostrar que, a través de la negación de la historicidad del saber científico, lo que se rechaza es la orientación subjetiva del conocimiento. De este modo se aprecia mejor en qué medida está mutilado el análisis positivista de la ciencia.

Nos queda por probar que las dificultades encontradas en la elaboración de una teoría de la inducción derivan efectivamente de esta inicial mutilación del método de análisis. Procederemos eligiendo un ejemplo esencial para nuestro propósito. Los

lógicos positivistas suponen la existencia de enunciados protocolarios cuya certeza está fuera de duda. Si la existencia de tales enunciados escapa a toda crítica es porque se concibe la percepción como un acontecimiento de la naturaleza, independientemente de toda referencia a una conciencia percipiente. Si se requiere, es porque se precisa un estado primero del conocimiento. Pero desde el momento en que se abordan los problemas de aplicación de la lógica inductiva, las dificultades se acumulan, como hemos visto. Hay que suponer la rectitud de dicho conocimiento primero si se quieren evitar las antinomias. A falta de reconocer que sólo hay predicados proyectables con respecto a una perspectiva científica determinada, se supondrá la proyectabilidad de los predicados del lenguaje corriente. De este modo, todo el conocimiento científico se convierte en prisionero de las creencias que transmite el conocimiento común. El positivismo se encuentra incapaz de dar cuenta del "desprendimiento" del primero con relación al segundo. Implícitamente niega que la elección de un lenguaje de observación sea la elección de una perspectiva científica particular y trata al lenguaje como un simple ropaje que no afecta de ninguna manera al contenido del conocimiento. Además se ve obligado, para garantizar la certeza de los "datos de la experiencia", a situar las inducciones primarias en un nivel extremadamente bajo. De ahí la considerable distancia entre los esquemas inductivos estudiados y los que se utilizan efectivamente en la ciencia, el carácter esquemático y sumario de los ejemplos adoptados. Es evidente, por ejemplo, que los datos aceptados por **Newton** como indudables y las inducciones que realiza son de una extrema complejidad respecto a las incesantes enumeraciones de cisnes a las que recurre continuamente el positivismo para irritación de los impacientes lectores.

En tal ejemplo, aparecen con mucha claridad los errores cometidos. Se concibe la ciencia de tal modo que el conocimiento común constituye su estado primero. Se olvida que la rectificación científica no procede mediante el desarrollo de un saber ya dado, sino por el cuestionamiento de lo que se considera adquirido, que el saber científico únicamente se ha hecho presente sobre el fondo de interrogaciones posibles. El derecho que habíamos exigido, al comienzo de esta obra, de "tomar el conocimiento en su curso, lejos de su origen sensible", sólo puede ser efectivamente concedido a los que poseen una doctrina de la rectificación. No es el caso de nuestros autores. Están en su derecho al "rechazar las cuestiones de origen", pero no al resolverlas de manera imperfecta, como hacen.

En realidad, la idea de un conocimiento primero no puede mantenerse si se quiere comprender la verdadera naturaleza del progreso científico. No hay origen del conocimiento sino en una intención de conocimiento determinada. El origen del conocimiento, como, por otra parte, su fin último, sólo es una idea de la razón; en la reflexión epistemológica juega un papel regulador y no constituyente.

El pensamiento positivista no podía integrar estas concepciones contrarias a todos sus principios fundamentales. La ausencia de una teoría de la rectificación, el dogmatismo cientifista que subsiste incluso cuando la ciencia es estimada como simplemente probable, le obliga a rehabilitar el conocimiento común. Es verdad que

ponerlo en cuestión supondría atestiguar que la idea de inducción primaria está vacía de contenido y renunciar al objetivo implícito de toda lógica inductiva: asentar la validez de la ciencia únicamente sobre la certeza sensible.

El desvelamiento de los presupuestos de las lógicas inductivas positivistas prueba que su fracaso no condena la epistemología de las ciencias inductivas a la esterilidad. Se puede construir sobre otros principios una doctrina válida del conocimiento experimental. Pero si el pensamiento positivista fracasa porque olvida que no hay naturaleza más que para un sujeto, otras filosofías tendrán que preservarse de un error contrario. No deberán ignorar que el sujeto no engloba a la naturaleza y deberán guardarse de los extravíos del idealismo que convierte, con demasiada facilidad, los principios de una teoría científica particular en condiciones de inteligibilidad impuestas a toda representación científica posible. Les será necesario reconocer que el conocimiento experimental está desprovisto de toda certeza y que, en consecuencia, no se podría pensar siquiera en asignarle una probabilidad. De ahí se sigue que renunciarán a constituir esa lógica inductiva cuya existencia no es más que un mito tan tenaz como nocivo.

Apéndices

APENDICE 1

NOCIONES DE MORFOLOGIA Y DE SEMANTICA

La finalidad de este apéndice, que se mantendrá a un nivel muy elemental, es presentar algunas nociones fundamentales de morfología y de semántica cuya comprensión es necesaria para la lectura de esta obra. Para ser breves, no nos someteremos a todas las exigencias que impone un tratamiento científico de los problemas en cuestión; en particular, cada vez que hablamos de nociones lógicas de uso muy corriente nos limitaremos a la mera alusión.

En esta obra utilizamos esencialmente la terminología de **Carnap**. Por eso, en lo que sigue, nos referimos a sus trabajos. Sin embargo, es preciso señalar que ciertos pasajes, especialmente el capítulo 12, suponen la utilización de una semántica diferente de la de **Carnap** y más rica que ella. Se encuentran entonces en el texto los datos necesarios para ese tema.

1. Problemas de morfología

a) *Fórmulas:* La construcción de una semántica presupone la elaboración de una morfología cuyo objeto es distinguir, entre las expresiones de un lenguaje formal determinado, es decir, entre las series finitas de signos que pertenecen al vocabulario de ese lenguaje, aquéllas que son fórmulas. Según el uso, se supone siempre que el conjunto de las fórmulas es recursivo.

En realidad, los sistemas a los cuales se alude en esta obra son, esencialmente, sistemas de orden 1, cuyo vocabulario comprende constantes individuales: "*a*", "*b*", etcétera, variables individuales: "*x*", "*y*", etc., predicados con *n* argumentos (siendo *n* un entero natural estrictamente positivo): "*P*", "*Q*", etc., pudiendo todos los símbolos precedentes estar afectados por acentos, índices, exponentes, un sistema completo de conectores del cálculo proposicional y símbolos de puntuación (paréntesis, comas). Se supone siempre que existe una infinidad enumerable de variables individuales.

Pueden ser introducidas notaciones más rigurosas, si se hace sentir la necesidad de ellas. Servirán, por ejemplo, para indicar el número de argumentos de un predicado, que será colocado como índice, o para determinar un orden de enumeración de las constantes individuales que pueden ser finitas en número o constituir un con-

junto infinito enumerable (en este último caso, se designan esas constantes por "a_1", "a_2", etc.).

El conjunto de las fórmulas está definido por las reglas recursivas de formación de uso corriente. En general, reservamos el nombre de fórmula únicamente a las fórmulas cerradas. Hagamos notar, simplemente, que utilizamos la notación parentética del cuantificador universal, escribiendo "(x)" lo que algunas veces se escribe "$(\forall x)$" y que para separar un predicado de sus argumentos, y sus argumentos entre sí, utilizamos eventualmente paréntesis y comas, si la facilidad de la lectura lo exige. Así, siendo "R" un predicado con dos argumentos, escribiremos sea "$R\,a\,b$", sea "Ra, b", sea "$R(a, b)$".

La elaboración de la morfología, y *a fortiori* la de la semántica, exige el uso de una metalengua. En realidad, para los problemas que nos preocupan, podemos contentarnos con datos rudimentarios. El nombre de un símbolo o de una expresión se obtiene poniéndolo entre comillas. Utilizaremos la convención de concatenación y, contingentemente, la convención de autonimia. Las minúsculas griegas, y a veces ciertas minúsculas romanas no utilizadas en otra parte (como "e", "h", "i"), son nombres de fórmulas (cerradas).

En lo que atañe a la definición de los predicados derivados y de las fórmulas en las que figuran, remitimos al apéndice siguiente.

b) *Observaciones terminológicas:* Una fórmula compuesta de un predicado con n argumentos seguido de n constantes individuales es llamada *atómica*. Por ejemplo, siendo "R" un predicado diádico, y "P" un predicado monádico, "$R(a, b)$", "Pa", son fórmulas atómicas.

Se dice que es *singular* una fórmula que no contiene ningún cuantificador. Así, "$\sim Pa \supset R(a, b)$" es una fórmula singular. Naturalmente, todas las fórmulas atómicas son singulares. Una fórmula que no es singular se llama *general.* Se puede denominar *universal* a una fórmula que, puesta en forma pre-nexa normal, no contiene más que cuantificadores universales. Suprimiendo el prefijo y sustituyendo las variables individuales por constantes individuales, siendo sustituidas todas las apariciones de una misma variable por la misma constante, se obtiene una fórmula singular que constituye un *ejemplo* de la fórmula universal. Así, "$\sim Pa \supset Q(a, b)$" o "$\sim Pb \supset Q(b, b)$" constituyen ejemplos de la fórmula universal "$(x)\,(y)\,(\sim Px \supset Q(x, y))$".

Sea la fórmula singular "$(Pa \vee \sim Pa) \supset Qb$". Está claro que una fórmula tal, equivalente a "$Q\,b$", no enseña nada con respecto a "a". Diremos que la constante "a" que figura en ella, no está mencionada allí esencialmente. En cambio, no ocurre lo mismo con "b". Propondremos entonces la siguiente definición: una constante individual está *mencionada esencialmente* en α, si está mencionada en α y en toda fórmula lógicamente equivalente a α. Naturalmente, la definición que acabamos de proponer supone que salgamos del campo demasiado estrecho de la morfología para dar un sentido a la idea de fórmulas lógicamente equivalentes, lo que haremos muy pronto.

2. El concepto de sistema semántico

Un lenguaje formal se convierte en un sistema semántico desde el momento en que se propone una interpretación de él que permite determinar las condiciones de verdad de las fórmulas de ese lenguaje, que serán interpretadas como frases declarativas, y definir el concepto de verdad lógica.

En primer lugar, se propondrán reglas llamadas de *designación* que determinan las entidades designadas por ciertos símbolos calificados como descriptivos. Esas reglas se pueden presentar bajo la forma de una lista que indica, para cada símbolo descriptivo, cuál es su *designatum,* lo que sólo es posible si el conjunto de esos símbolos es finito, o bajo la forma de un método general que permite determinarlo. Si se excluyen los procedimientos ostensivos, indicar la entidad designada es nombrarla. Resulta de ello que las reglas de designación consisten en reglas que autorizan la traducción de los símbolos de un lenguaje a símbolos de otro lenguaje.

Se enuncian entonces reglas de verdad a propósito de las fórmulas atómicas. Son del tipo siguiente: " "*Pa*" es verdadera si y sólo si el objeto designado por "*a*" posee la propiedad designada por "*P*"." Su posibilidad presupone que las reglas de designación son compatibles con las reglas de formación de las fórmulas en el sentido de que, si las constantes individuales se interpretan como nombres de objetos, los predicados con n argumentos se interpretarán como nombres de relaciones n-ádicas entre esos objetos. Además, otras reglas, de forma recursiva, determinan las condiciones de verdad de las fórmulas no-atómicas. Suponen la introducción de las tablas de verdad para la interpretación de los conectores y fijan la significación de los cuantificadores delimitando el dominio de variación de las variables. Se encontrará el detalle de esas reglas, para un sistema semántico particular, en el capítulo 11, § 1. Advirtamos que la elección del dominio de interpretación es libre y puede tomarse de la matemática.

Las reglas de verdad determinan simplemente las *condiciones de verdad* de las fórmulas del sistema. Indican en qué condiciones puede ser estimada una fórmula como verdadera. Pero su posesión no asegura que se esté en condiciones de determinar efectivamente el valor de verdad de una fórmula particular. Por ejemplo, si decidimos que "$\alpha \vee \beta$" es verdadera si y solamente si una al menos de las dos fórmulas "α" o "β" lo es, determinamos una condición de verdad de "$\alpha \vee \beta$" que permanece insuficiente para decidir el valor de verdad de esta fórmula en tanto que ignoremos los valores de verdad de "α" y de "β".

Es preciso señalar que en numerosos casos no se exige en absoluto que se fijen efectivamente las reglas de designación. Basta con que se establezcan ciertas condiciones concernientes a los *designata* de las constantes descriptivas. Por ejemplo, se pedirá que las constantes individuales designen objetos distintos. Puede ocurrir que exista un conjunto de fórmulas, los *postulados de significación,* que expresen de modo exhaustivo las restricciones impuestas a los *designata.* Incluso si no ocurre así, se tiene derecho a hablar de sistema semántico siempre que las reglas de designación

sean suficientemente fuertes como para dar un sentido a los conceptos que vamos a definir ahora.

3. La noción de verdad lógica

La constitución de una semántica resuelve el problema suscitado por el caso de ciertas fórmulas que, sin ser tesis de los cálculos tradicionales, designan, en una interpretación determinada, una proposición analítica, lógicamente verdadera. Por ejemplo, si P designa la propiedad "ser soltero" y Q la propiedad "ser casado", la fórmula "$(x)\ (Px \supset \sim Qx)$, que no es una tesis, designa no obstante una proposición analítica, lógicamente verdadera. Gracias a los conceptos que acabamos de exponer, podemos dar una definición rigurosa de la noción de verdad lógica.

Se considerarán *lógicamente verdaderas* las fórmulas de un sistema semántico cuya verdad pueda ser concluida de las meras reglas de verdad del sistema. Entendamos por eso que la determinación de su valor de verdad no supone en modo alguno el conocimiento de datos relativos a las entidades designadas. Así, las reglas recursivas admitidas corrientemente bastan para establecer la verdad de las fórmulas del tipo "$\alpha \vee \sim \alpha$", que serán, por tanto, lógicamente verdaderas. Naturalmente, la definición de la verdad lógica que acabamos de proponer supone que se esté en condiciones de dar un sentido a la expresión "cuya verdad puede ser concluida de las meras reglas de verdad del sistema". En otros términos, la metalógica debe estar fuera de discusión.

Asimismo se estimarán como *lógicamente falsas* las fórmulas cuya falsedad se deduce de las meras reglas de interpretación; decir que son aquéllas cuya negación es lógicamente verdadera es una definición equivalente a la que precede, habida cuenta de las reglas de verdad comúnmente mantenidas. Una fórmula está *lógicamente determinada* si es lógicamente verdadera o lógicamente falsa. Se abreviarán esas expresiones poniendo L-verdadera, L-falsa y L-determinada. Adoptamos el signo de aserción de Frege para designar las fórmulas L-verdaderas. Si $\mathscr{S}$ es un sistema semántico "$\vdash_{\mathscr{S}} \alpha$" significa "$\alpha$ es L-verdadera en $\mathscr{S}$". Se suprimirá el índice cuando no subsista ninguna ambigüedad en cuanto al sistema de referencia.

Decir que α L-implica β es decir que de la verdad de α y de las reglas de verdad del sistema se concluye la verdad de β. Se demuestra fácilmente que esta relación se satisface si y sólo si se tiene "$\vdash \alpha \supset \beta$". La definición de la L-equivalencia es evidente.

Se llama fáctica a una fórmula que no está lógicamente determinada. Entre las fórmulas fácticas se encuentran contingentemente fórmulas verdaderas. En principio, llamamos *leyes* a las fórmulas generales que no son L-verdaderas.

Señalemos que, si se define un sistema formal sobre un lenguaje, erigir ese lenguaje en sistema semántico tal que todos los teoremas del sistema formal sean L-ver-

daderos, es elegir un modelo de sistema formal en el sentido corriente del término. Pero, en la perspectiva de **Carnap**, bastante próxima en eso a **Kemeny**, la construcción de los sistemas semánticos no presupone necesariamente la definición de sistemas formales. La semántica es pues independiente de esta parte de la sintaxis que desborda el campo de la pura morfología. Sin embargo, habida cuenta de las reglas de verdad habitualmente mantenidas, todas las tesis de los cálculos lógicos clásicos son *L*-verdaderas. Es verdad que, en numerosos casos, el conjunto de las verdades lógicas excede al conjunto de las tesis de los sistemas lógicos clásicos. La eventualidad contraria no se encuentra más que en ciertos casos particulares. Se dirá que hay entonces *independencia lógica* de las fórmulas atómicas.

Suponiendo que un sistema semántico que contenga las reglas recursivas de verdad admitidas corrientemente esté determinado por un conjunto de postulados de significación, se prueba fácilmente que las fórmulas lógicamente verdaderas se confunden con las fórmulas deducibles de esos postulados en un cálculo clásico. La determinación de un conjunto de postulados de significación aparece entonces como un problema muy próximo al de la formalización de una teoría matemática ingenua. Si se quiere admitir, por una parte, que la idea de fórmula lógicamente verdadera en un sistema semántico debe explicitar la noción tradicional de verdad necesaria y, por otra parte, que no hay ningún lugar en el dominio matemático para las verdades fácticas y que todas las verdades matemáticas son necesarias, se constata que el segundo problema no es más que la restricción del primero al solo caso de las interpretaciones matemáticas. El teorema de **Gödel** probaría entonces que no es siempre posible determinar un conjunto recursivo de postulados de significación.

Para los problemas que nos preocupan, se pueden eludir las dificultades así encontradas. Consideraremos que un sistema semántico está determinado no bien se delimita el conjunto de las fórmulas lógicamente verdaderas, sin ocuparnos de saber cuáles son los procedimientos utilizados para obtener esta delimitación. Exigiremos simplemente que esos sistemas sean tales que todas las tesis de los cálculos lógicos clásicos sean lógicamente verdaderas.

APENDICE 2

LA TEORIA DE LAS ALGEBRAS DE BOOLE Y SUS APLICACIONES EN LOGICA

La teoría de las álgebras de **Boole** deriva de los trabajos de lógica del siglo pasado. Ciertamente, hoy, puede ser presentada como una teoría matemática entre otras; el concepto de álgebra de **Boole** será subsumido bajo la noción de álgebra abstracta al mismo título que los conceptos de grupo o de anillo. Pero las aplicaciones a la lógica juegan siempre un papel determinante en el estudio de las álgebras de **Boole** y los especialistas de lógica matemática están entre los autores que más contribuyen a su desarrollo. Vayamos más lejos: si el concepto de álgebra de **Boole** tiene un lugar central en matemáticas, si su uso es necesario para constituir ciertas teorías –en particular, el cálculo de probabilidades– es porque las estructuras del álgebra de **Boole** pueden recibir una interpretación lógica.

El fin de esta exposición es presentar algunas definiciones y algunos resultados indispensables para la inteligibilidad del texto y mostrar, muy particularmente, qué uso puede hacerse en lógica del concepto de álgebra de **Boole**.

1. El concepto de álgebra de Boole

a) *De los retículos a las álgebras de Boole:*

Sea E un retículo[1] que posee un elemento más pequeño con notación $\overline{0}$ y un elemento más grande con notación $\overline{1}$. Designemos respectivamente por "$x \wedge y$" y "$x \vee y$" las cotas inferior y superior de la pareja $\langle x, y \rangle$. Se tienen inmediatamente las igualdades siguientes, válidas para todos los elementos de E:

(1) $x \wedge x = x$	(1′) $x \vee x = x$
(2) $x \wedge y = y \wedge x$	(2′) $x \vee y = y \vee x$
(3) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	(3′) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
(4) $x \wedge \overline{0} = \overline{0}$	(4′) $x \vee \overline{0} = x$
(5) $x \wedge \overline{1} = \overline{x}$	(5′) $x \vee \overline{1} = \overline{1}$.

[1] Recordemos que un conjunto ordenado es un retículo si todo par de elementos posee una cota superior y una cota inferior.

El retículo será distributivo si se satisfacen las dos relaciones siguientes, cuya equivalencia se puede establecer fácilmente:

$$(6)\ (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$
$$(6')\ (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

Se dice que un elemento x' es el complemento de x si se tiene:

$$(7)\ x' \wedge x = \overline{0} \quad \text{y} \quad (7')\ x' \vee x = \overline{1}.$$

Se prueba entonces la relación

$$(8)\ (x')' = x,$$

y se demuestra la unicidad del complemento.

Un retículo se dice complementado si todo elemento tiene un complemento; definición que supone la existencia de elementos extremos.

Un álgebra de **Boole** es un retículo distributivo y complementado.

b) *Definición algebraica de las álgebras de Boole:*

Acabamos de situar el concepto de álgebra de **Boole** en la teoría de los *conjuntos ordenados*. Pero se habría podido presentarlo directamente como una noción específicamente algebraica. Supongamos definidas sobre un conjunto E una operación unitaria de notación " ' " y dos leyes de composición binarias de notación " $\wedge$ " y " $\vee$ ". E estará provisto de una estructura de álgebra de **Boole** si esas operaciones satisfacen las 15 relaciones precedentes.

Si se define entonces la relación binaria "$x \leqslant y$" por la satisfacción de la igualdad $x \wedge y = x$ (o de la igualdad $x \vee y = y$, de la que se prueba que es equivalente a la precedente), se demuestra que esta relación es una relación de orden y que E es un retículo distributivo complementado para esta relación. Las dos definiciones propuestas son pues equivalentes. Según las circunstancias, se hablará en términos de relaciones de orden o de operaciones; la elección del lenguaje más adecuado permite obtener demostraciones elegantes.

Algunas observaciones se imponen:

1) Las relaciones (1) a (15) no constituyen un sistema de axiomas independientes. No se tiene, por otra parte, sino el atolladero de la elección para determinar un sistema de axiomas independientes no manteniendo más que algunos de ellos de los cuales se deducen[2] los demás. Pero ese problema es de poco interés para nuestro propósito.

[2] Cf. **Birkhoff** (G.): *L.T.*, cap. X, § 4, pp. 155-159. **Halmos** (P.): *L.B.A.*, § 2, pp. 5-6 y 9.

2) Hay una vinculación estrecha entre las estructuras del álgebra de **Boole** y las de anillo booleano. Recordemos que un anillo es llamado booleano cuando todo elemento es idempotente. Se demuestra que es entonces necesariamente conmutativo y de característica 2 (es decir, tal que se tiene siempre $x + x = 0$). Sobre todo anillo booleano, se pueden definir tres operaciones derivadas tales que el anillo esté provisto de una estructura de álgebra de **Boole** relativamente a esas operaciones. Recíprocamente, sobre un álgebra de **Boole** se pueden definir dos operaciones derivadas que la proveen de una estructura de anillo booleano. Así se asocian de modo canónico álgebras de **Boole** y anillos booleanos.

3) Los axiomas de las álgebras de **Boole** satisfacen una propiedad llamada dualidad: permutando $\overline{0}$ y $\overline{1}$, $\wedge$ y $\vee$ en un axioma, se obtiene otro axioma. De ahí la posibilidad de pasar siempre en un teorema al resultado "dual", que será igualmente un teorema.

c) *Ejemplos de álgebras de Boole:*

1) Sea E un conjunto. El conjunto de las partes de E, o más generalmente, toda familia F de partes de E tal que si X e Y pertenecen a F, pertenecerán igual a ella $(E - X)$ y $(X \cup Y)$ es un álgebra de **Boole** para las operaciones de complementación, reunión e intersección. Un álgebra de este tipo se llama álgebra de conjuntos.

El teorema de **Stone** establece que toda álgebra de **Boole** es isomorfa con un álgebra de conjuntos. Autoriza pues la restricción del estudio de las álgebras de **Boole** a las meras álgebras de conjuntos.

2) El conjunto compuesto de dos elementos designados por $\overline{0}$ y $\overline{1}$ constituye un álgebra de **Boole** cuando se le provee de tres operaciones definidas por las tablas siguientes:

x	x'
$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$

x	y	$x \wedge y$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$

x	y	$x \vee y$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$

Esta álgebra, que está asociada al anillo $Z/2Z$, juega un papel esencial en lógica.

d) *Algebras σ y álgebras completas:*

Un álgebra de **Boole** es un retículo de un tipo particular. Pero, en un retículo, si toda parte finita está acotada, no ocurre lo mismo con las parte infinitas. A la satis-

---

Rosenbloon (P.): *E.M.L.*, cap. 1, § 2, pp. 8 y sig. **Curry** (H.B.): *F.M.L.*, cap. 6, D. pp. 289-303.

facción de esta condición suplementaria, corresponden los conceptos de álgebra σ y de álgebra completa.

Sea A un álgebra de **Boole**. Si toda serie $(x_n)_{n \in N}$ de elementos de A tiene una cota inferior que se designará por $\bigwedge_{n \in N}(x_n)$, se dice que A es un álgebra σ. Si toda familia $(x_i)_{i \in I}$ de elementos de A tiene una cota inferior que se designará por $\bigwedge_{i \in I}(x_i)$, se dice que A es completa. Por paso a los complementarios, se demuestra fácilmente que en esos dos casos la existencia de las cotas inferiores es equivalente a la de las cotas superiores, que son designadas respectivamente por $\bigvee_{n \in N}(x_n)$ y por $\bigvee_{i \in I}(x_i)$.

Se prueba que, dándose un álgebra A, existe un álgebra σ más pequeña y un álgebra completa más pequeña que contienen a A. En el caso de las álgebras de conjuntos, el álgebra σ más pequeña que contiene a A se llama prolongación boreliana de A.[3] Estos conceptos serán esenciales en teoría de probabilidades.

e) *Algebras atómicas, álgebras libres:*

Un elemento x constituye un *átomo* de un álgebra de **Boole** si $y \leqslant x$ implica ya sea $y = x$, ya sea $y = \overline{0}$. Un álgebra es atómica si todo elemento de esta álgebra contiene al menos un átomo. Se demuestra entonces que todo elemento es cota superior de los átomos que contiene. Se obtiene así una descomposición canónica de los elementos de un álgebra atómica que corresponde, en las aplicaciones lógicas, a las formas normales disyuntivas. Toda álgebra finita es atómica y, si comporta n átomos, está constituida por 2^n elementos.

Los conceptos de sistemas de generadores y de homomorfismo se definen en teoría de las álgebras de **Boole** del mismo modo que en toda otra teoría algebraica. El concepto de sistema de generadores *libre* corresponde a la idea intuitiva de un sistema de generadores que no están ligados por ninguna relación distinta de aquéllas que son teoremas de las álgebras de **Boole**. La definición rigurosa es la siguiente: un álgebra A es libre sobre B si B genera a A y si toda aplicación de B en un álgebra A' puede ser prolongada en un homonorfismo de A en A'.

f) *Filtro:*

Una parte F de un álgebra A es un filtro si se satisfacen las condiciones siguientes:

1) $1 \in F$,

2) si $p \in F$ y $q \in F$, entonces $p \wedge q \in F$,

3) si $p \in F$ y si $p \leqslant q$, entonces $q \in F$.

[3] Sea A un álgebra de partes de un conjunto E. $\mathscr{P}(E)$ constituye naturalmente un álgebra completa que comprende a A. La intersección de las álgebras completas (o de álgebras σ) contenidas en $\mathscr{P}(E)$ y que contienen a A constituye el álgebra completa (o álgebra σ) más pequeña que contiene a A.

A partir de todo filtro F de A se puede definir sobre A una relación binaria poniendo $p \equiv q$ (mod. F) si y solamente si $p' \vee q \in F$ y $p \vee q' \in F$. Se demuestra que esta relación es una congruencia para las operaciones de A y que A/F está provisto de una estructura de álgebra de **Boole** por los procedimientos clásicos de paso a las leyes-cocientes. Este procedimiento será esencial en lógica, como se va a ver

Señalemos que el concepto dual del concepto de filtro es el concepto de ideal. Ideales del álgebra de **Boole** e ideales del anillo booleano canónicamente asociado se confunden por naturaleza.

2. Las álgebras de fórmulas.

Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de las fórmulas de un lenguaje formalizado del que se supone que contiene las dos reglas de formación: "Si α es una fórmula, $\sim \alpha$ es una fórmula' y "Si α y β son fórmulas, $(\alpha \supset \beta)$ es una fórmula". Además, los conectores proposicionales derivados reciben en ese lenguaje las definiciones clásicas. Sobre este lenguaje se define un sistema formal $\mathscr{S}$ (o un sistema semántico) cuyo conjunto de tesis (o de fórmulas L-verdaderas) es cerrado con respecto al modus ponens y comprende todas las instancias de los esquemas de axiomas del cálculo de proposiciones.

Sobre F se definen dos operaciones binarias que hacen corresponder con $\langle \alpha, \beta \rangle$ respectivamente $(\alpha \vee \beta)$ y $(\alpha \,\&\, \beta)$, y la operación unitaria que hace corresponder con α a $\sim \alpha$. $\vdash_{\mathscr{S}} \alpha \equiv \beta$ determina sobre F una relación de equivalencia compatible con esas operaciones. Designemos por $\mathscr{F}/\mathscr{S}$ el conjunto cociente y por $|\alpha|$ la clase de α según esta relación, estando designadas las operaciones obtenidas por paso al cociente por los mismos signos que las operaciones iniciales definidas sobre $\mathscr{F}$.

Se establece entonces muy fácilmente que $\mathscr{F}/\mathscr{S}$ es un álgebra de **Boole** para las operaciones que acabamos de definir. Por ejemplo, la relación (1) que debe satisfacer toda álgebra de **Boole** se escribe aquí: $|\alpha| \,\&\, |\alpha| = |\alpha|$. Deriva inmediatamente de la tesis $\vdash_{\mathscr{S}} (\alpha \,\&\, \alpha) \equiv \alpha$.

La relación de orden correspondiente a la estructura de álgebra de **Boole** de $\mathscr{F}/\mathscr{S}$: $|\alpha| \leqslant |\beta|$ se satisface si y sólo si se tiene $\vdash_{\mathscr{S}} \alpha \supset \beta$. El elemento más grande de $\mathscr{F}/\mathscr{S}$ es la clase compuesta de todas las fórmulas que son tesis, o de las fórmulas L-verdaderas de $\mathscr{S}$; el más pequeño elemento, de la clase de las fórmulas refutables en $\mathscr{S}$ (o de las fórmulas L-falsas de $\mathscr{S}$). Esta álgebra se llama álgebra de **Lindenbaum** del sistema $\mathscr{S}$. Se la designará por $A(\mathscr{S})$.

Si $\mathscr{S}'$ es un sistema formal que contiene a $\mathscr{S}$, se demuestra fácilmente que los teoremas de $\mathscr{S}'$ (o más exactamente, el conjunto constituido por sus clases de equivalencia) constituyen un filtro de $A(\mathscr{S})$. $A(\mathscr{S}')$ es el cociente de $A(\mathscr{S})$ módulo de ese filtro.

Numerosos conceptos sintácticos se expresan bajo la forma de propiedades del álgebra de **Lindenbaum**. Por ejemplo, la completud sintáctica de $\mathscr{S}$ es equivalente a

la afirmación "$A(\mathscr{S})$ es un álgebra con 2 elementos". El concepto de álgebra de **Boole** se presenta entonces como un instrumento fecundo en el estudio de la sintaxis, incluso si el desarrollo pleno de la lógica algebraica exige la utilización de estructuras más complejas (álgebras poliádicas de **Halmos** o álgebras cilíndricas de **Tarski**).

3. Las álgebras de predicados

En esta obra, aplicamos el concepto de álgebra de **Boole** al estudio de las familias de predicados. Sin permitir la adquisición de resultados nuevos, ese procedimiento pone a nuestra disposición un lenguaje a la vez preciso y cómodo.

a) *Algebras de predicados:*

Sea un lenguaje formal del primer orden, de tipo clásico, que contiene una familia π de predicados con n argumentos. Si ρ y ρ' son los nombres de dos predicados que pertenecen a π, se pueden definir predicados que, atendiendo a la convención de concatenación, serán designados por $(\sim \rho)$, $(\rho \,\&\, \rho')$ y $(\rho \vee \rho')$, estableciendo las definiciones siguientes, en las que ι_1, ι_2, etc., son nombres de constantes o variables individuales:

$$(1) \quad (\sim \rho)(\iota_1, \ldots, \iota_n) = {}_{Df} \sim \rho(\iota_1, \ldots, \iota_n)$$
$$(2)\ (\rho \,\&\, \rho')(\iota_1, \ldots, \iota_n) = {}_{Df} \rho(\iota_1, \ldots, \iota_n) \,\&\, \rho'(\iota_1, \ldots, \iota_n)$$
$$(3)\ (\rho \vee \rho')(\iota_1, \ldots, \iota_n) = {}_{Df} \rho(\iota_1, \ldots, \iota_n) \vee \rho'(\iota_1, \ldots, \iota_n)$$

La aplicación de estas definiciones puede, naturalmente, ser reiterada un número finito de veces. Se llama *clausura booleana* de π y se designa por $A(\pi)$ al más pequeño conjunto de predicados derivados que contienen π y que es cerrado con respecto a la aplicación de las reglas (1) a (3). Los elementos de $A(\pi)$ se llaman *funciones booleanas* de los elementos de π. Las razones de esas denominaciones van a aparecer inmediatamente.

Supongamos definido, sobre el lenguaje considerado, un sistema formal o un sistema semántico $\mathscr{S}$ sometido a las condiciones evocadas en el parágrafo precedente. Se define una relación binaria entre elementos de $A(\pi)$ estableciendo $\rho \equiv \rho'$ si y solamente si

$$\vdash (x_1) \ldots (x_n)[\rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv \rho'(x_1, \ldots, x_n)].$$

Se demuestra muy fácilmente que esta relación es una congruencia para las tres operaciones definidas sobre $A(\pi)$ que hacen corresponder respectivamente con ρ, $(\sim \rho)$ y con la pareja $\langle \rho, \rho' \rangle$, $(\rho \,\&\, \rho')$ y $(\rho \vee \rho')$. Se prueba que el cociente de

$A(\pi)$ por esta relación es un álgebra de **Boole** para las leyes-cocientes. Llamaremos a esta álgebra, álgebra de predicados generados por π y la designaremos por $\mathscr{A}(\pi)$. La relación de orden que se le asocia recibirá la notación "$\subset$" y se tiene $\rho \subset \rho'$ si y solamente si: $\vdash_{\mathscr{S}} (x_1) \ldots (x_n)(\rho(x_1, \ldots, x_n) \supset \rho'(x_1, \ldots, x_n))$. En ese caso, se dirá que el predicado ρ (o la función booleana ρ) está contenido en ρ', o que ρ implica ρ'. Dos predicados derivados, o funciones booleanas, son equivalentes si representan al mismo elemento de $\mathscr{A}(\pi)$.

Los elementos extremos de $\mathscr{A}(\pi)$ son designados respectivamente por $\overline{0}$ y por $\overline{1}$, según la notación común de las álgebras de **Boole**; siendo P un predicado cualquiera, $\overline{0}$ es la clase de $(P \,\&\, \sim P)$, $\overline{1}$ la de $(P \vee \sim P)$. Un predicado que represente al elemento $\overline{0}$ se llama *vacío*; se dice *universal* si representa el elemento $\overline{1}$.

b) *Los predicados Q:*

Supongamos la familia π finita y compuesta de m predicados $P_1, P_2 \ldots \,\&\, P'_m$; supongamos además que $\mathscr{S}$ sea un cálculo lógico clásico. $\mathscr{A}(\pi)$ es entonces atómica y los átomos son los predicados de la forma $P'_1 \,\&\, P'_2 \ldots P'_m$, siendo P'_i ya P_i, ya $\sim P_i$.[4] Esos predicados, en número de 2^m, son llamados los predicados Q de la familia π. Se los enumera según un orden canónico que es el siguiente: se sustituye a P'_i por 1 o 0 según que P'_i sea P_i o $\sim P_i$ lo que lleva, por ejemplo, a representar $P_1 \,\&\, \sim P_2 \,\&\, P_3$ por 101, y se disponen esos números por orden decreciente.

Todo elemento de $A(\pi)$ se escribe entonces bajo la forma de una disyunción (o suma) de predicados Q.

c) *Sistemas semánticos y álgebras de predicados:*

Supongamos definido un sistema semántico y consideremos las fórmulas en las que sólo figuran los predicados de una familia π. Puede ser que algunas de esas fórmulas sean L-verdaderas sin ser tesis de los cálculos lógicos clásicos. Si son fórmulas universales, se traducen bajo la forma de relaciones entre elementos de $\mathscr{A}(\pi)$ que son teoremas generales de las álgebras de **Boole**. En ese caso, π no es un sistema de generadores libre de $\mathscr{A}(\pi)$. En realidad, es cómodo traducir esas relaciones bajo la forma de enunciados que afirmen la vacuidad de ciertos predicados Q.

Los datos que acabamos de exponer apuntan más a introducir un lenguaje cómodo que a la adquisición de resultados nuevos. No obstante, su utilidad es innegable. El límite de los procedimientos utilizados se debe al hecho de que las familias de predicados considerados deben contener predicados que tengan todos el mismo

[4] En rigor, sería necesario decir que los átomos de $\mathscr{A}(\pi)$ están representados por los predicados $P'_1 \,\&\, \ldots \,\&\, P'_m$, pues los elementos del álgebra de **Boole** son clases de equivalencia de predicados, y no predicados. Pero se puede tolerar el lenguaje relajado que empleamos pues no introduce aquí ningún riesgo de confusión.

número de argumentos. El tratamiento de los otros casos, si se quieren establecer resultados no triviales, exige el recurso a la teoría de las álgebras cilíndricas o poliádicas. Pero el instrumento modesto que acabamos de presentar basta para nuestros propósitos.

APENDICE 3

LOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA MATEMATICA DE PROBABILIDADES

La teoría matemática de probabilidades se presenta hoy bajo la forma de una disciplina axiomatizada cuyos conceptos fundamentales reciben definiciones exclusivamente formales. Es bastante notorio que no haya adquirido ese estatuto hasta una fecha reciente. La dificultad de hacer abstracción de los problemas suscitados por la aplicación de la teoría matemática, la amplitud de las cuestiones epistemológicas relativas al sentido del concepto de probabilidad han constituido, sin duda alguna, un obstáculo en esta materia. Además, una axiomatización fecunda del cálculo de probabilidades presuponía el desarrollo sistemático de la teoría de las álgebras de **Boole** cuyo teorema fundamental –el teorema de representación de **Stone**– data sólo de 1936. Tres años antes, **Kolmogorov** había propuesto, en *Grundbegriffe des Wahrscheinlich-Keitsrechnung,* una axiomatización del cálculo de probabilidades que fue universalmente adoptada y se mostró plenamente satisfactoria. En esta exposición, presentaremos las líneas fundamentales de una teoría de este tipo.

1. Definición de probabilidad – la teoría elemental de probabilidades

Sea A un álgebra de **Boole**. Probabilizar A es definir una aplicación p de A en el conjunto de los reales no-negativos que satisfaga las dos condiciones siguientes:

1.° $p(\overline{1}) = 1$.

2.° $p(a) + p(b) = p(a \vee b)$, para toda pareja de elementos $\langle a, b \rangle$ de A, tales que $a \wedge b = \overline{0}$.

A es entonces llamada un álgebra de probabilidades. La imagen de a por p –dicho de otro modo $p(a)$– se llamará la probabilidad de a. De $a \vee a' = \overline{1}$ y $a \wedge a' = \overline{0}$, se deduce que se tiene $p(a) + p(a') = 1$. Como ninguna probabilidad es negativa, se sigue de ahí que las probabilidades pertenecen todas al intervalo $[0, 1]$.

Esta definición reclama algunos comentarios:

1.° El teorema de **Stone** nos autoriza a limitarnos a las álgebras de conjuntos como haremos a continuación. Sea E un conjunto, A un álgebra de partes de E. A está probabilizada si se ha definido sobre A una función que toma sus valores del conjunto de los reales no-negativos, y que es aditiva, es decir, tal que se tenga

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ si $A \cap B = \phi$ y tal que $p(E) = 1$. Esta presentación del concepto de probabilidad en términos de función aditiva de conjuntos, que es la adoptada por **Kolmogorov**, será extremadamente útil en lo que sigue.

2.° Un uso, que es fácil de justificar, quiere que se denominen sucesos a los elementos de un álgebra probabilizada: En efecto, supongamos que esos elementos designan sucesos aleatorios, es decir, acontecimientos que, en circunstancias determinadas, pueden producirse o no producirse. Los elementos $\overline{0}$ y $\overline{1}$ (o ϕ y E, en el caso de un álgebra de partes de E) designarán respectivamente un suceso imposible y un suceso que se producirá necesariamente. a' designa el suceso que consiste en la no-producción del suceso designado por a. $a \wedge b$ la aparición conjunta de los sucesos designados por a y por b, $a \vee b$ el suceso que consiste en la producción de uno de esos dos sucesos por lo menos. La incompatibilidad de a y de b se expresa por la igualdad $a \wedge b = \overline{0}$. En esas condiciones, se encuentran de nuevo las interpretaciones clásicas en las que se atribuye la probabilidad a los sucesos.

No hay ninguna razón para asombrarse del hecho de que las producciones de sucesos obedezcan las leyes de las álgebras de **Boole**. En lugar de decir que el elemento a designa la aparición del suceso α, se puede decir que a designa la *proposición* que enuncia la aparición de α. Las leyes de composición del álgebra de **Boole** reciben entonces las interpretaciones lógicas tradicionales en términos de conectores proposicionales. En realidad, es el lugar ocupado por las álgebras de **Boole** en lógica el que hace necesaria su presencia en la teoría de probabilidades.

3.° Si A es atómica, lo que es cierto si A es finita, los átomos de A son llamados *sucesos elementales.*

4.° En la condición de aditividad impuesta a la probabilidad, se ha reconocido la traducción del enunciado conocido tradicionalmente con el nombre de *principio de las probabilidades totales.* Es posible sorprenderse de no ver figurar, entre el número de los axiomas, el *principio de las probabilidades compuestas* que afirma que la probabilidad de la aparición simultánea de dos sucesos independientes es el producto de sus probabilidades. Pero la traducción de este principio no puede pertenecer a los axiomas de la teoría abstracta de probabilidades pues la noción de *sucesos independientes* no es una noción primitiva de esta teoría.

En cambio, una vez probabilizada un álgebra, se definirá el concepto de sucesos independientes a partir de la probabilidad escogida: dos sucesos representados por a y b son independientes *con respecto a la función de probabilidad* p si se tiene: $p(a \wedge b) = p(a) \cdot p(b)$. Cuando se intenta "aplicar" la teoría abstracta, si se tienen buenas razones para estimar como independientes, en el sentido corriente del término, los sucesos representados por a y b; es decir, para suponer que la producción de uno no afecta a la probabilidad de que el otro se produzca, se impondrá a la función p satisfacer la igualdad precedente. Así, lejos de ser un axioma de la teoría abstracta, el principio de las probabilidades compuestas aparece como un enunciado que

permite, en la teoría abstracta, dar un sentido a la idea de sucesos mutuamente independientes[5].

5.º Es claro que el concepto de *probabilidad condicional o relativa* puede ser introducido fácilmente. Estando A probabilizada, siendo a y b elementos de A tales que $p(b) \neq 0$, se define la probabilidad de a relativa a b, de notación $p(a/b)$, del modo siguiente: $p(a/b) = p(a \wedge b)/p(b)$. La independencia de a y de b se expresa entonces por $p(a/b) = p(a)$ (o $p(b/a) = p(b)$, relación equivalente a la anterior)[6].

2. Las probabilidades enumerables y las álgebras de Kolmogorov

La teoría que acabamos de presentar permite establecer un cierto número de resultados clásicos. No obstante, su campo de aplicación sigue siendo muy limitado. Sea $(a_n)_{n \in N}$ una serie de elementos de un álgebra probabilizada A, separados por pares. Los axiomas propuestos no permiten calcular $p(\bigvee_{n \in N} a_n)$ en función de las probabilidades $p(a_n)$. La teoría precedente manifiesta pues sus insuficiencias desde que se toman en consideración conjuntos infinitos de sucesos. No es plenamente satisfactoria más que cuando se la aplica a álgebras finitas, en cuyo caso los problemas del tipo del que acabamos de evocar no se plantean. En ese sentido es en el que se la califica de *elemental.*

Para tratar el caso de las álgebras infinitas, es necesario reforzar el sistema de axiomas propuestos: se exigirá de la función p no sólo que sea aditiva sino que sea completamente aditiva. Sea A un álgebra de conjuntos. Una función p de conjuntos será *completamente aditiva* si para toda serie $(a_n)_{n \in N}$ de elementos de A separados por pares y tal que $\bigvee_{n \in N} (a_n)$ exista, se tiene: $p \bigvee_{n \in N} a_n = \sum_{n \in N} p(a_n)$. (Si se habla en términos de álgebras de sucesos, se pedirá que la serie esté compuesta de sucesos *incompatibles* dos a dos.)

Una función de conjuntos no-negativa y completamente aditiva se llama una *medida*. Si A es un álgebra de partes de E y si $p(E) = 1$, la medida p se dice *totalmente finita*. Es fácil mostrar que, para que p sea una medida sobre A, es necesario y suficiente que, para toda serie de elementos de A tales que $a_1 \supset a_2 \ldots \supset a_n \ldots$, con

---

[5] Nos limitamos al caso de dos sucesos. Pero se puede generalizar fácilmente al caso de una familia cualquiera: se dice que una familia $(a_i)_{i \in I}$ de sucesos de A está compuesta de sucesos mutuamente independientes si, para toda sub-familia finita $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, se tiene $p(a_{i_1} \wedge \ldots \wedge a_{i_k}) = p(a_{i_1}) \ldots p(a_{i_k})$.

[6] Se podría introducir el concepto de probabilidad condicional a título de concepto primitivo y definir la probabilidad "absoluta" estableciendo $p(a) = p(a/1)$. Un procedimiento tal, que, en términos técnicos, no obliga a limitarse a las medidas totalmente finitas, lleva al concepto de álgebra de probabilidades condicionales. (Cf. **Renyi**: C.P., cap. 2, § 11, pp. 59-60.)

$\bigwedge_{n \in N} a_n = 0$, se tenga $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Es además este último enunciado el que **Kolmogorov** retiene como axioma[7].

La condición de aditividad completa sólo tiene sentido si la serie de elementos $(a_n)_{n \in N}$ tiene una cota superior en el álgebra considerada. Nada asegura que sea siempre así. Por eso es bueno limitarse al caso en que esta condición se satisface, es decir, al caso de las álgebras σ de **Boole**. La definición de la probabilidad será entonces la siguiente:

Sea E un conjunto llamado espacio de los sucesos. Un álgebra σ A de partes de E es un *álgebra de probabilidades de* **Kolmogorov** si A está provista de una medida totalmente finita, es decir, de una aplicación p en el conjunto de los reales no-negativos que satisface las condiciones siguientes:

1.° $p(E) = 1$.

2.° Para toda serie finita o enumerable $(a_i)_{i \in I}$ de elementos de A (siendo I el conjunto de los enteros o una parte no vacía de este conjunto), se tiene $p(\bigvee_{i \in I} a_i) = \sum_{i \in I} p(a_i)$, si $i \neq j$ entraña $a_i \wedge a_j = \phi$.

Los dos resultados fundamentales son los que permiten construir, a partir de un álgebra de **Boole** provista de una medida, un álgebra de probabilidades de **Kolmogorov**:

1.° Sea A un álgebra de partes de un conjunto E. Existe un álgebra σ más pequeña que contiene A, que se llama *prolongación boreliana* de A y que se designa por $B(A)$.[8]

2.° Sea A un álgebra de **Boole** provista de una medida p, es decir, de una probabilidad completamente aditiva sobre A. Se puede extender la medida p a una medida p^* definida sobre la prolongación boreliana de A y esta extensión es única. En otros términos, se define sobre $B(A)$ una medida p^* unívocamente determinada y que coincide con p para todo elemento de A. p^* provee a $B(A)$ de una estructura de álgebra de **Kolmogorov**. Se la obtiene del modo siguiente: para todo $a \in B(A)$, se establece $p^*(a) = \inf_{S(a)} (\bigvee_{n \in N} a_n)$ (siendo $S(a)$ el conjunto de las series de elementos que recubren a, es decir, tales que $\bigvee_{n \in N} a_n \geqslant a$. p^* se llama medida exterior de A.[9]

3. El concepto de variable aleatoria

Frecuentemente, para caracterizar el resultado de una prueba, no basta con decir que se ha producido un determinado suceso, sino que es preciso describir ese suceso

---

[7] *F.P.*, cap. 2, §, 1; p. 14.

[8] Ese resultado ha sido establecido en el apéndice precedente, § 1, *d.*

[9] Cf. **Kolmogorov:** *F.P.*, cap. 2, § 2, p. 17 y **Renyi:** *C.P.*, cap. 2, § 7, T. 2, pp. 41-42.

dando cuenta del resultado de las diversas medidas que se hayan efectuado. El concepto de variable aleatoria, es decir, de magnitud que "depende del azar" es entonces indispensable. A la definición formal de ese concepto, cuyo uso acabamos de describir en términos vagos, se dedican las líneas que siguen.

Las variables aleatorias son funciones numéricas – o funciones con valores en R^n [10] – definidas sobre un conjunto E y tales que se pueda hablar de la probabilidad de que esas funciones tengan un valor determinado o un valor contenido en un intervalo determinado. Todo el problema es saber si se puede definir esa probabilidad y cómo.

El caso más simple es aquél en que la variable aleatoria no puede tomar sus valores sino en un sub-conjunto de R de potencia igual al enumerable al máximo. En ese caso, la variable aleatoria se llama *discreta* y el problema planteado se resuelve muy fácilmente.

Sea A un álgebra de **Kolmogorov** de partes de un conjunto E, ξ una aplicación de E en un conjunto finito o enumerable de reales: $x_1, x_2, \ldots$ ξ será una variable aleatoria sobre A, si, para todo valor x_i se tiene $\overset{-1}{\xi}(x_i) \in A$. En ese caso, $p(\overset{-1}{\xi}(x_i))$ será la probabilidad de que la variable aleatoria ξ tenga el valor x_i. Podría suceder que el conjunto de los elementos de E que dan a ξ un valor determinado no pertenezca a A y por tanto que su probabilidad no esté definida. En ese caso, ξ no sería una variable aleatoria sobre A.

La probabilidad de que ξ tenga el valor x_i (dicho de otra manera, la probabilidad del conjunto $\overset{-1}{\xi}(x_i)$) se designa por $p(\xi = x_i)$. A toda variable aleatoria discreta se puede asociar una función numérica así definida: $F(x) = p(\xi < x)$, llamada *función de repartición* de ξ. Está claro que, si se establece $p_i = p(\xi = x_i)$, se tiene $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$. Naturalmente, F es monótona creciente y se tiene siempre $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

En el paso a las variables aleatorias contínuas, el concepto de función de repartición va a ser esencial. En efecto, en el caso en el que el conjunto de los valores posibles de una variable aleatoria exceda al enumerable, no se puede, en general, definir la probabilidad de que esta variable tenga un valor determinado. La definición simple, utilizada en el caso precedente, es entonces inoperante. En cambio, el concepto de función de repartición permitirá definir las variables aleatorias contínuas.

Sea ξ una aplicación de E en R. Para todo real x, se llama conjunto de nivel x al conjunto A_x de los elementos de E tal que $e \in A_x$ sea equivalente a $\xi(e) < x$. ξ será

[10] Se podrían considerar también funciones con valores en un espacio vectorial sobre R con infinidad de dimensiones. Pero esas extensiones del concepto de variable aleatoria son de poco interés para nuestro propósito.

una variable aleatoria definida sobre un álgebra de **Kolmogorov** A de partes de E si todos los conjuntos de nivel de ξ pertenecen a A. En otros términos, en ese caso se exige que la medida definida sobre A permita hablar de la probabilidad de que la función ξ tenga un valor estrictamente inferior a un número dado. Naturalmente, se establece $p(A_x) = p(\xi < x)$. La función $F(x) = p(A_x)$ se llama *función de repartición* de la variable ξ. Se demuestra que es monótona, no-decreciente, continua a la izquierda y que varía de 0 a 1.[11] Si $F(x)$ es diferenciable, su derivada $f(x)$ se llama la densidad de ξ.

La generalización al caso de las variables aleatorias con valores en R^n es inmediata: para todo n-tuplo $\langle x_1, ..., x_n\rangle$ de reales, se define el conjunto de nivel $A_{\langle x_1, ..., x_n\rangle}$ como el conjunto de los elementos e de E tales que $\text{proy}_i [\xi(e)] < x_i$, para todo i de 1 a n. Se define entonces una función de repartición con n dimensiones estableciendo $F(x_1, ..., x_n) = p(A_{\langle x_1, ..., x_n\rangle})$, a reserva de que todos los conjuntos de nivel pertenezcan a un álgebra de **Kolmogorov**. Si F es diferenciable, la derivada $\dfrac{\partial F(x_1, ..., x_n)}{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_n}$ define la densidad de ξ.

La independencia de las variables aleatorias se define de manera semejante a la independencia de los sucesos: sean ξ y η dos variables aleatorias sobre una misma álgebra de **Kolmogorov** cuyas funciones de repartición son respectivamente $F(x)$ y $G(y)$. Se pueden considerar siempre ξ y η como las dos coordenadas de una variable aleatoria única, definida sobre la misma álgebra, y cuya función de repartición[12] es $H(x, y)$. ξ y η serán independientes si se tiene $H(x, y) = F(x) \cdot G(y)$.

Nos quedan por definir algunos conceptos esenciales en las aplicaciones.

Se llama *esperanza matemática* de una variable discreta ξ, de distribución (p_i), a la cantidad $\Sigma\, p_k \cdot x_k$, extendiéndose la sumación a todos los valores de ξ. Si ξ es una variable aleatoria continua de función de repartición $F(x)$, la esperanza matemática de ξ se define por $E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF(x)$. Naturalmente, la esperanza matemática no existe sino en tanto que esta integral converja. Si la densidad $f(x)$ está definida por todas partes o casi por todas partes (es decir, por todas partes, excluido un conjunto de probabilidad nula), se tiene $E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$. De la independencia de ξ y de η se concluye: $E(\xi \cdot \eta) = E(\xi) \cdot E(\eta)$.

La desviación típica de ξ, que se designará por $\sigma(\xi)$ y cuyo cuadrado se denomina varianza de ξ, está determinada por la igualdad $\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2$. De manera más general, $E(\xi^n)$ es llamado momento de orden n de ξ. Los momentos se obtienen fácilmente a partir de la función característica de ξ que no es otra que la transformada de Fourier de su función de repartición:

---

[11] Se demuestra, además que toda función que tenga esas propiedades puede ser considerada como una función de repartición, definiéndose el álgebra de probabilidades como el conjunto de las partes medibles del intervalo $[0, 1]$ en el sentido de la medida de **Lebesgue.**

[12] Esta posibilidad resulta del hecho de que el conjunto de nivel $A_{\langle x, y\rangle}$ es idéntico a $A_x \cap B_y$ y, por tanto, pertenece al álgebra A si A_x y B_y pertenecen a ella.

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\, \mathrm{d}F(x).$$

Si se designa por $M_n(\xi)$ el momento de orden n de ξ, se tiene:

$$\varphi^n(0) = i^n M_n(\xi).$$

OBRAS CITADAS

En las notas, las obras están designadas por una sigla que se indica aquí antes del título de la obra.

Achinstein (P.), V.A.C.: *Variety and Analogy in Confirmation theory*, Phil. Sci., 30 (1963), número 3, pp. 207-221.

Ayer (A. J.), P.C.: *Le problème de la confirmation*, Logique et Analyse, 32 (1965), pp. 238-264.

Bachelard (G.), E.C.A.: *Essai sur la connaissance approchée*, Paris, 1927.

– V.I.R.: *La valeur inductive de la relativité*, Paris, 1929.

Bar-Hillel (Y.), N.S.D.: *A note on state-descriptions*, Phil. Stud., 2 (1951), n.º 5, pp. 72-75.

Bar-Hillel (Y.) y **Carnap** (R.), S.I.: *Semantic information*, Brit. J. Philos. Sci., 3 (1953), n.º 12, pp. 308-310.

Barker (S.F.), I.H.: *Induction and Hypothesis (A study of the logic of confirmation)*, Ithaca, N.-Y., 1957.

Bernouilli (J.), A.C.: *Ars conjectandi*, Basilea, 1713.

Birkhoff (G.), L.T.: *Lattice theory*, rev. ed., Providence, 1948.

Blackwell (D.) y **Girshick** (M. A.), G.S.D.: *Theory of Games ans Statistical Decisions*, New York and London, 1954.

Boole (G.), I.L.T.: *An Investigation of the Laws of Thought*, London, 1854.

Borel (E.), T.C.P.: *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, Paris, 1939.

Braithwaite (R. B.), S.E.: *Scientific Explanation*, New York, 1960.

Broad (C. D.), P.D.I.: *The principles of demonstrative induction*, Mind, 39 (1930), pp. 302-317 y 426-439.

Bross (I. D. J.), P.D.R.: *Prévision et décisions rationnelles*, Paris, 1961.

Burks (A. W.), P.T.I.: *The presupposition theory of induction*, Phil. Sci., 20 (1953), n.º 3, pp. 177-197.

– O.P.I.: *On the presuppositions of induction*, Rev. Meta. (U.S.A.), 8 (1955), n.º 4, pp. 574-611.

– C.S.I.: *On the significance of Carnap's system of induction for the philosophy of induction* en **Schilpp** (P. A.): P.C.

Carnap (R.), A.N.L.: *L'ancienne et la nouvelle logique*, Paris, 1933.

– T.M.: *Testability and Meaning*, Phil. Sci., 3 (1936), pp. 419-471 y 4 (1937), pp. 1-40.

– L.S.L.: *Logical syntax of language*, London, 1937.

– I.S.: *Introduction to semantics*, Cambridge, Mass., 1942.

– I.L.: *On inductive logic*, Phil. Sci., 12 (1945), n.º 1, pp. 72-97.

– T.C.P.: *The two concepts of probability*, Phil. Phen. Res., 5 (1945), n.º 4, pp. 513-532.

– A.I.L.: *On the applications of inductive logic*, Phil. Phen. Res., 8 (1947), n.º 1, pp. 133-148.

– P.R.I.: *The problem of relations in inductive logic*, Phil. Stud., 2 (1951), n.º 5, pp. 75-80.

– M.P.: *Meaning postulates*, Phil. Stud., 3 (1952), pp. 65-73 (reeditado en M. N., 2.ª ed., páginas 222-229).

– C.I.M.: *The continuum of inductive methods*, Chicago, 1952.

– M.C.T.C.: *The Methodological Character of Theoretical Concepts, en Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, vol. 1, pp. 38-75, Minneapolis, 1956.

– M.N.: *Meaning and Necessity*, 2.ª ed., Chicago, 1956.

– L.F.P.: *Logical Foundations of Probability,* 2.ª ed., Chicago, 1962.
– A.I.M.: *The aim of inductive logic,* en *Logic, Methodology and Philosophy of Science* (Nagel, Suppes y Tarski eds.), pp. 303-318, Stanford, 1962.
– P.R.: *The philosopher replies, en* **Schlipp** (P.A.), pp. 859-1013: P.C., La Salle, Ill., 1963.
– V.A.P., *Variety, Analogy and Periodicity in Inductive Logic,* Phil. Sci., 30 (1963), n.º 3, pp. 222-227.
Carnap (R.) y **Stegmuller** (W.), I.L.W.: *Induktive Logik and Wahrscheinlichkeit,* Wien, 1959.
Cavailles (J.), C.P.: *Du collectif au pari,* R.M.M., 47 (1940), pp. 139-163.
Chatalian (G.), I.V.D.: *Probability: Inductive versus deductive,* Phil. Stud., 3 (1952), n.º 4, pp. 49-56.
Church (A.), C.R.S.: *On the concept of random sequence,* Bull. Amer. Math. Soc., 46 (1940), n.º 2, pp. 130-135.
Comte (A.), C.P.P.: *Cours de philosophie positive,* Paris, 1877 (4.ª ed.).
– D.E.P.: *Discours sur l'esprit positif,* Paris, 1923.
Copeland (A. H.), A.N.T.: *Admissible numbers in theory of probability,* Amer. J. of Math., 50 (1928), n.º 4, pp. 535-552.
– I.E.H.: *Independant event histories,* Ibid., 51 (1929), n.º 4, pp. 612-618.
– P.S.T.: *Point set theory applied to the random selection of an admissible number,* Ibid., 58 (1936), n.º 1, pp. 81-92.
– C.C.D.: *Consistency of the conditions determining Kolleltivs,* Trans. Amer. Math. Soc., 42 (1937), pp. 33-57.
– S.I.F.: *Statistical induction and the foundations of probability,* Theoria (Suède), 28 (1962), n.º 1, pp. 27-44.
Cournot (A.), E.F.C.: *Essai sur les fondements de la connaissance,* Paris, 1851.
Curry (H. B.), F.M.L.: *Foundations of Mathematical Logic,* New York, 1963.
Duhem (P.), T.P.: *La théorie physique, son objet, sa structure,* 2.ª ed., Paris, 1914.
Fisher (R. A.), F.T.S.: *On the Mathematical Foundations of Theoretical statistics,* Phil. Tr. R. Soc., Ser. A.V. 222 (1922), pp. 309-368.
– I.P.: *Inverse Probability,* Proc. Camb. Phil. Soc., 26 (1930), pp. 528-535.
– I.P.L.: *Inverse probability and the use of likelihood,* Ibid., 28 (1931-1932), pp. 257-261.
– N.P.L.: *Two New Properties of Mathematical Likelihood,* Proc. Royal Soc., Ser. A, 144 (1934), pp. 285-307.
– L.I.I.: *The logic of inductive inference,* J. Royal Stat. Soc., XCVIII, Pt. 1 (1935), pp. 39-54.
– D.E.: *The design of Experiments,* Edinburgh and London, 1935.
– U.I.: *Uncertain Inference,* Proc. Amer. Acad. of Arts and Sci., 71 (1936), n.º 4, pp. 245-257.
– S.M.S.I.: *Statistical Methods and Scientific Inference,* Edinburgh and London, 1956.
Finetti (B. de), P.L.S.: *La prévision, ses lois logiques, ses sources subjectives,* An. de l'inst. H. Poincaré, 7 (1937), pp. 1-68.
Frechet (M.), E.D.: *Exposé et discussion de quelques recherches récentes sur les fondements du calcul des probabilités,* en Actes du colloque consacré à la théorie des probabilités (Genève, 1937), Paris, 1939.
Gini (D.), C.M.P.: *Concept et mesure de la probabilité,* Dialectica, 3 (1949), n.º 9-10, pp. 46-54.
Goodman (N.), S.I.: *On the simplicity of ideas,* J.S.L., 8 (1943), pp. 107-123.
– L.S.P.: *The logical simplicity of predicates,* J.S.L., 14 (1949), pp. 32-41.
– A.T.S.: *An improvement of the theory of simplicity,* J.S.L., 15 (1950), pp. 228-229.
– S.A.: *The structure of appearence,* Cambridge, Mass., 1951.
– F.F.F.: *Fact, fiction and forecast,* Cambridge, Mass., 1955.
Granger (G. G.), P.F.S.H.: *Pensée formelle et sciences de l'homme,* Paris, 1960.
Halmos (P. R.), L.B.A.: *Lectures on boolean algebras,* Princeton, 1963.
Helmer (O.) y **Oppenheim** (P.), S.D.P.: *A syntactical definition of probability and of degree of confirmation,* J.S.L., 10 (1945), pp. 25-60.
Hempel (C. G.), P.S.D.: *A purely syntactical definition of confirmation,* J.S.L., 8 (1942), pp. 12-43.

– S.L.C.: *Studies in the logic of confirmation,* Mind, 54 (1945), n.º 213, pp. 1-26 t n.º 214, pp. 97, 121.
– I.I.: *Inductive inconsistencies,* Synthese, 12 (1960), n.º 4, pp. 439-460.
Hempel (C. G.) y **Openheim** (P.), D.D.C.: *A Definition of "Degree of confirmation",* Phil. Sci., 12 (1945), n.º 2, pp. 98-115.
– S.L.E.: *Studies in the logic of explanation,* Ibid., 15 (1948), n.º 2, pp. 135-175.
Hesse (M.), A.C.T.: *Analogy and Confirmation Theory,* Dialectica, 17, n.º 2-3, 66/7, pp. 284-297.
Hossiasson-Lindenbaum (J.), O.C.: *On confirmation,* J.S.L., 5 (1940), pp. 133-148.
Hume (D.), E.E.H.: *Enquête sur l'entendement humain* (tr. Leroy), Paris, 1947.
Husserl (E.), P.L.P.: *Prolégomènes à la logique pure* (tr. Elie), Paris, 1959.
Jeffreys (H.), P.P.P.T.: *The present position in probability theory,* Brit. J. Phil. Sci., 5 (1955), n.º 20, pp. 275-289.
– S.I.: *Scientific Inference,* 2.ª ed., Cambridge, 1957.
– T.P.: *Theory of probability,* 3.ª ed., Oxford, 1961.
Kant (E.), C.R.P.: *Critique de la Raison Pure,* tr. Tramesaygues et Pacaud, Prefacio de A. Hannequin, Paris, 1905.
– P.M.N.: *Premiers principes métaphysiques de la science de la Nature,* tr. Gibelin, Paris, 1952.
Katz (J. J.), P..S.: *The problem of Induction and Its Solution,* Chicago, 1962.
Kemeny (J. G.), M.L.S.: *Models of logical systems,* J.S.L., 13 (1948), pp. 16-30.
– C.R.L.: Rec. de **Carnap** (R.): *L.F.P.,* in J.S.L., 16 (1951), 205-207.
– E.M.L.: *Extensions of the methods of inductive logic,* Phil. Stud., 3 (1952), n.º 3, pp. 38-42.
– C.I.L.: *A contribution to inductive logic,* Phil. Phen. res., 13 (1953), n.º 3, pp. 371-374.
– C.R.C.: Rec. de **Carnap** (R.): *C.I.M.*, in J.S.L. 18 (1953), pp. 168-169.
– L.M.F.: *A logical measure function,* J.S.L., 18 (1953), pp. 289-308.
– U.S.I.: *The use of simplicity in induction,* The phil. rew., 62 (1953) n.º 3, pp. 391-408.
– F.B.P.: *Fair bets and inductive probability,* J.S.L., 20 (1955), pp. 263-273.
– C.P.I.: *Carnap's theory of probability and induction,* en **Schilpp** (P. A.): P.C., pp. 711-738.
Kemeny (J. G.) y **Oppenheim** (P.), D.F.S.: *Degree of factural support,* Phil. Sci., 19 (1952), pp. 307-324.
Keynes (J. M.), T.P.: *A treatise on probability,* London, 1921.
Kenale (W.), P.I.: *Probability and Induction,* Oxford, 1949.
Kolmogorov (A. N.), F.P.: *Foundations of the theory of probability,* New York, 1956.
Koopman (B. O.), A.A.P.: *The axioms and algebra of intuitive probability,* Ann. Math., Ser 2, 41 (1940), pp. 269-292.
Lachelier (J.), F.I.: *Du fondement de l'induction,* en *Œuvres,* T. 1, pp. 19-92, Paris, 1933.
Lalande (A.), T.I.E.: *Les techniques de l'induction et de l'expérimentation,* Paris, 1929.
– P.I.: Prefacio a **Dorolle** (M.): *Les problèmes de l'induction,* Paris, 1933.
Laplace (P.), E.D.P.: *Essai philosophique sur les probabilités* en *Œuvres*, t. 7, Paris, 1847.
Leblanc (H.), P.C.L.: *The problem of the confirmation of laws,* Phil. Stud., 12 (1962), n.º 6, pp. 81-84.
Lehmann (R. S.), C.R.B.: *On confirmation and rational betting,* J.S.L., 20 (1955), pp. 251-262.
Leibniz (G. W.), M.S.: *Mathematische Schriften,* Berlin, 1849, 62.
– N.E.E.: *Nouveaux essais sur l'entendement humanin.*
Levy (P.), F.C.P.: *Les fondements du calcul des probabilités,* en R.M.M., 68 (1963), n.º 1, pp. 48-56.
Martin (R.), L.C.F.: *Logique contemporaine et formalisation,* Paris, 1964.
Martin (R. M.), C.C.S.: *On Carnap's conception of Semantics,* en **Schilpp** (P. A.); P.C., pp. 351-384.
Matalon (B.), E.P.: *Epistémologie des probabilités,* en **Piaget** (J.): *Logique et connaissance scientifique,* Paris, 1967, pp. 526-553.
Mill (J. S.), S.L.D.I.: *Système de logique dèductive et inductive,* tr. Peisse, Paris, 1866 (2 vol.).

Mises (R. von), T.P.: *Théorie des probabilités. Fondements et applications,* An. Inst. H. Poincaré, 3 (1932), pp. 137-190.
– R.F.C.: *Quelques remarques sur les fondements du calcul des probabilités,* en Actes du colloque consacré à la théorie des probabilités (Genève, 1937), Paris, 1939, pp. 57-66.
– P.S.T.: *Probability, Statistics and Truth,* 2.ª ed., London, 1957.
Nagel (E.), P.T.P.: *Principles of the Theory of Probability,* Chicago, 1939.
– C.T.I.: *Carnap's theory ofinduction,* en **Schilpp** (P. A.): P.C., pp. 761-784.
Nelson (E. J.), P.R.I.: *Professor Reichenbach on induction,* J. Philos., 33 (1936), n.º 21, pp. 577-580.
Neyman (J.), O.T.S.E.: *Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability,* Phil. Trans. Royal Soc., Ser. A, 236 (1937), pp. 33-80.
– E.S.P.C.: *L'estimation statistique traitée comme un problème classique de probabilité,* en Actes du Colloque consacré à a la théorie des probabilités, Genève, 1937, Paris, 1939.
– G.T.S.E.: *Foundations of the general theory of Statistical Estimation,* en *Thèorie des probabilités, fondements et applications,* pp. 83-95, Paris-Louvain, 1952.
Nicod (J.), P.L.I.: *Le problème logique de l'induction,* 2.ª ed., Paris, 1961.
Planck (M.), I.M.: *L'image du monde dans la physique moderne,* Paris, 1933.
Poincaré (H.), S.H.: *La Science et l'Hypothèse,* Paris, 1902.
Poirier (R.), R.P.I.: *Remarques sur la probabilité des inductions,* Paris, 1931.
Popper (K. R.), L.S.D.: *The logic of scientific discovery,* London, 1959.
– D.M.S.: *The demarcation between science and metaphusics,* en **Schilpp** (P. A.); P.C., pp. 183-226.
Putnam (H.), D.C.I.: *Degree of confirmation and inductive logic,* en **Schilpp** (P. A.); P.C.; pp. 761-783.
Ramsay (F. P.), F.M.: *The foundations of mathematics and other logical essays,* 3.ª ed., London, 1954.
Rasiowa (H.) y **Sikorski** (R.), M.M.: *The mathematics of matemathematics,* Warsawa, 1965.
Reichenbach (H.), F.L.P.: *Sur les fondements logiques du calcul des probabilités,* An. del'Inst. H. Poincaré, 7 (1937), pp. 267-348.
– C.I.: *Causalité et Induction,* Bull. Soc. Fr. Phil., 37 (1937), pp. 127-159.
– E.P.: *Experience and Prediction,* Chicago, 1938.
– C.C.: *Comments and Criticisms,* J. Philos., 35 (1938), n.º 6, pp. 127-130.
– T.P.: *The theory of probability,* Chicago and Los Angeles, 1949.
– A.P.S.: *L'avenement de la philosophie scientifique,* tr. Weill, Paris, 1955.
– P.S.T.: *The philosophy of space and time,* New York, 1958.
Renyi (A.), C.P.: *Calcul des probabilités,* Paris, 1966.
Rosenbloom (P.), E.M.L.: *The elements of mathematical logic,* New York, 1950.
Russell (B.), H.K.: *Human Knowledge,* London, 1948.
Savage (L.), F.S.: *The foundations of statistics,* London and New York, 1954.
Scheffler (I.), A.S.: *Anatomie de la science,* Paris, 1966.
Schilpp (P. A.), ed. P.C.: *The philosophy of Rudolf Carnap,* La Salle, Illinois, 1963.
Shimony (A.), C.A.C.: *Coherence and the axioms of confirmation,* J.S.L., 20 (1955), pp. 1-28.
Tarski (A.), L.S.M.: *Logic, Semantics, Metamathematics,* Oxford, 1956.
Ville (J.), E.N.C.: *Etude critique de la notion de collectif,* Paris, 1939.
Wald (A.), S.N.C.: *Sur la notion de collectif,* en Rec. Acad. Sci. Paris 202 (1936), pp. 180-182.
– P.S.I.: *On the principles of statistical inference,* Notre-Dame, Indiana, 1942.
– S.A.: *Sequential Analysis* New York, 1947.
– S.D.F.: *Statistical Decision Functions,* New York, 1950.
Watanabe (S.), M.E.I.I.: *A mathematical explication of inductive inference,* en *Colloque sur les fondements des mathématiques,* Paris, 1965, pp. 67-107.
Watkins (J. W. N.), C.W.K.: *Confirmation without Background Knowledge,* Brit. J. Philos. Sci., 10 (1960), n.º 40, 318-320.

Whiteley (C. H.), H.P.C.: *Hempel's Paradoxes of confirmation,* Mind, 54 (1945), n.º 214, pp. 156-158.

Williams (D. C.), C.S.P.: *The challenging situation in the philosophy of probability,* Phil. Phen. res., 5 (1945), n.º 1, pp. 67-86.

Wittgenstein (L.), T.L.P.: *Tractatus logico-philosophicus,* tr. Klossowski, Paris, 1961.

Wright (G. H. von), T.I.P.: *A treatise on induction and probability,* London, 1951.

– L.P.I.: *The logical problem of induction,* 2.ª ed., Oxford, 1957.

Wrinch (D.) y **Jeffreys** (H.), C.F.P.: *On certain fundamental Principles of Scientific Inquiry,* Phil. Mag. (6. ser.), 42 (1921), pp. 369-390.

INDICE ALFABETICO

Aceptación (reglas de –) 113-114, 293-298.
Adecuación (ver condiciones de adecuación).
Admisible (función de decisión –) *82;* (número –) *130-131.*
Agassi (paradoja de –) 286.
Ajuste (condición de–) *231*-232, 238-239, 258.
Analogía (y razonamiento por–) 242-245, 272, 274, 291.
Anchura lógica de un predicado (ver extensión lógica).
Aprendizaje por la experiencia (principio del –) *108,* 209, 238, 260-261.
Apuesta 26, 146, 197-198, 294;
(cociente de –) *196,* 200-202, 301-302;
(tasa de –) *196.*
Artificial (clase – o manufacturada / clase natural) 50, 182, 286, 289; (ver también género natural).
Bayes (teorema de –) *66,* 67, 69.
Bayesiano (esquema –) 71, 76, 83, 89-91, 124, 144, 192, 235, 236, 241; (solución – (a)) 83, 294.
Bernouilli (teorema de –) *67,* 124, 131, 133, 143, 152-153, 235, 241.
*c** (función – y función *m**) *239*-250, 251, 254, 258, 259, 265, 267, 282, 285, 303.
Causa (ver probabilidad de las causas).
Cociente de apuesta (ver apuesta).
Coherencia (y – estricta de un sistema de opiniones, de una función de apuesta, de un grado de confirmación) 196, 199-204, 231, 248, 260-261, 280.
Colectivo (concepto de – y teoría del –) 120-121, 126-134, 135-136, 168.
Completud de la descripción (condición de –) *248*-249, 265, 267, 282, 285.
Comportamiento inductivo 24-77.
Condición de adecuación (de un grado de confirmación) 110-111, 224, 251, 259-267, 269.
Condición necesaria / suficiente *41.*
Confirmación (caso de –) *54*-61, 171; (grado de –) 106, *199,* 222-224; (principio de la –) 22, 109; (inducción por –) 210-216; (teorema principal de la –) *109,* 207-210; (teorema de la –) 206-221.
Conocimiento (– avanzado / primitivo) *144*-145, 153, 168-169, 176, 184.
Consolidación (de un predicado) 51.
Construcción lógica (teoría de la –) 15-16, 277.
Contenido (– de una fórmula) 255, 265, *295*-300.
Continuidad (axioma de – de Von Wright) *220.*
Convergencia (axioma de –) *127.*
Convergencia (reglas estadísticas convergentes) *177-178.*
Coste de la experimentación 79-81, 85,86, 92-93, 294.
Cournot (principio de –) 123-125.
Creencia racional (grado de –) 71, 122, 192-199.
Decisión (teoría de la – estadística) 26, 63-64, 77-86, 92-94. 146-147, 198, 294-300; (función de –) *79-80,* 81-85; (función de – uniformemente mejor; clase completa de funciones de –; clase minimal de funciones de –) 81-82.
Definición coordinativa 112-113, *120*-121, 135, 140, 143.
Descripción de estado *227,* 230-239, 251, 253-254, 257, 262, 302-303.
Determinismo (– de un predicado; diversas formas) *43*-45, 214; (principio del –) *43*-45.
Distribución (– estadística, – individual) *229*-230, 234-239, 241-243, 267-270, 274-276.
División (ver familia completa de predicados).
Elección de posición *128-129.*
Eliminación (inducción por –) 37-47.
Empirismo probabilitario 25-26, 119.
Enumeración simple(inducción por –) 22, 144-146, 153-154, 169,205.
Epistemología formal 24-25, *31.*
Errores (– de primer tipo / de segundo tipo) *75,* 77-78.
Especificado (grado de confirmación –) *247,* 272, 280.
Estadística *72,* 74, 76; (reglas – (s)/no – (s)) *178,* 182-183.

Estimación *68-69*, 77-78, 81-82, 191, 303-303;
(– no sesgada) *72*, 81-82;
(– suficiente) *73-74*, 81-82;
(– de intervalo) 73-74.
Estrategia 26, 64, 83, 86;
(– puras / mixtas) *84*, 241-242, 297-298.
Estructura (o descripción de –) *228*, 233-239.
Evidencia total (principio de la –) *104-105*, 148-149, 285-286, 292-293.
Explicativa (inducción –) *15-16*, 154, 157, 173-174.
Extensión (– de un test) *75*, 80-81.
Extensión lógica (– de un predicado) *299*-230, 238-239, 240-243, 249-250, 260-261, 288, 291.
Falsación 15, 49-50, 59-60.
Familia completa de hipótesis *65-66*, 87-88, 293.
Familia completa de predicados 42, *229*, 241, 259-260;
(lenguajes con –) 259-261, 264-266, 269-275.
Frecuencia (y – límite) 120-121, 123-132, 134-136, 140, 147-158, 161-166, 191-192, 236;
(– de verdad) *141*, 148-149, 154, 170-171, 173-174.
Función (ver nombre de la función).
Generalización 13-15, 47-53, 146, 154;
(reglas de –) 47-53.
Género natural 48, 50, 52 (ver también clase artificial).
Goodman (paradoja de –) 49-52, 90, 181-182, 285-287.
Grado de confirmación (ver confirmación), (– especificado: ver especificado).
Grado de creencia racional (ver creencia racional).
Hempel (paradoja de –) 54-61, 144-145, 171-172.
Implicación probable 119, *137-140*, 143-144, 145-146, 160-162, 165-166, 171.
Independencia (– lógica de las fórmulas) *227*, 235-236, 248, 253-255, 262-264, 285, 319.
(– lógica de los predicados) *42*;
(series de pruebas independientes) 126-127, 132-134, 162.
Indiferencia (principio de –) 67, *69*-71, 89-91, 109-110, 123-125, 143-144, 192, 214-216, 239-240, 279, 290-291.
Inducción (primaria/secundaria) *32*, 38, 52, 65, 87, 155, 184, 249-250, 279, 291, 306-307, 311;
(regla de – de Reichenbach) 107-108, *144-147*, 175-177, 181-187, 235-236, 240-242, 271-272, 293, 303-304.
Inducción en cruz 150-153, 155, 164-167.
Inductivas (reglas –) *32*, 47-53.
Inferencia (–directa) *234*, 240, 302-304;
(teoría de la – estadística) 22-23, 62-95, 184.
Intervalo de confianza *76-77*, 81-82;
(– no sesgado) *76-77*;
(ver también estimación de intervalo).
Irregularidad 128-129, 132-134, 136, 141-142.
Irrelevancia (principio de la – de la posición espacio-temporal) 45-46, 210-212.
Juegos (teoría de –) 26, 64, 83-87, 92-94.
Justificación (– de la inducción) 12-13, 34-35, 110-112, 135, 175-187, 299-302.
L (fórmulas – – verdadera, – – falsa, – – determinada) *227-229*, 318.
Laplace (regla de –) 23, *89-90*, 240-242, 271-272.
Learning from experiment (ver aprendizaje por la experiencia).
Lenguaje (– de la ciencia) 97, 252, 276-281, 310;
(– teórico) 12, 166, 275-281;
(– L_n^π, L_∞^π) *226*, 227-250, 259-260, 267-268, 269-270, 273-274, 311-312.
(– con familias de predicados) (ver familia completa).
Ley universal 104-105, 293;
(probabilidad de una –) 23, 109-110, 246-249, 255.
Límite práctico (series con –) *180*, 185-186.
Lógica inductiva 31-32;
(– clasificadora, – comparativa) 101-102.
m^* (función –) (ver función c^*).
Martingala 132.
Matriz *226*.
Medida (función de –) 98, 106-107, 122, 130, *230-231*, 238-239, 250-251, 253-258, 295, 302-303, 331-332.
Mención esencial (– de una constante) *56-57*, 265-266, 316.
Metalógico (concepto – de probabilidad) 112-114, 191-192.
Método inductivo (y metodología de la inducción) *222*, 239-240, 282-284;
(– de primera especie / de segunda especie) *270*-272.

Minimax (solución – en teoría de juegos) *84*, 86, 294, 298-299.
Modelo (en el sentido de Kemeny) 31, *255-258*, 261-265, 319.
Muestra aleatoria 68, 90-92.
Normal (serie –) *142-143*, 152-153, 167-170.
Opinión (y sistema de – (s)) *195*-203.
Paradoja (ver nombre de la paradoja).
Pérdida (función de –) *78*-81, 86, 93-95, 294-300.
Peso (de una propuesta) *147-148*, 148-159, 191.
Posit (ver propuesta).
Postulado de significación (ver significación).
Potencia (– de un test) *75-76*, 80-81.
Predicado *Q* 43-45, *228*-230, 244-246, 266-270, 274-275, 302-304, *325-327*.
Predicción 54-56, 58-59, 120, 175-181, 305-306.
Primaria (inducción –) (ver inducción).
Principio (ver nombre del principio).
Principio (s) de la inducción 17-21, *33*, 37-47, 304-306.
Probabilidad (– *a priori* / *a posteriori*) *66*, 69-70, 72, 76-77, 89-91, 124, 235-239;
(– de las causas) 65-67;
(– de las hipótesis teóricas) 99, 114-115, 135, 153-158, 170-174;
(– de un suceso singular) 147-149, 161-164.
(– inductiva) *96*-97, 120-121.
Proceso estocástico *78-79*, 81-82, 92-93.
Propuesta *146*;
(– primaria / secundaria) *150-151*, 155-157, 164-167.
Proyectabilidad (– de un predicado) 50-52, 311.
Prueba inductiva (teoría de la –) 20-21, *33*, 37-47.
Randomness (axiom of –) *128*-129.
Rango (– de una fórmula) *227-228*, 230-232, 233-234, 235-236, 257-258, 295-297.
Reconstrucción racional 34-35, 107-108, *110-112*, 224.
Región crítica (– de un test) *75*.
Regla (ver nombre de la regla).
Regularidad (– de una función de medida) *230-231*.
Relevancia 105, 260-261, 166-167, 292-293.
Remanencia (serie sin –) *142-143*.
Retículos (en el sentido de Reichenbach) *147*-153, 154-157, 165-167.
Riesgo (función de –) (ver función de pérdida).
Secuencial (análisis –, test –) *78-79*.
Semántica 30-31, 54, 97-98, 225, 227, 251-258, 289, 317-319.
Serie proposicional *141-142*, 149-150, 160.
Significación (condiciones de –) 13-16, 119, 192, 278;
(postulados de –) 31, 251-252, 264, 318.
Silogismo estadístico *107-108*.
Simetría (condiciones de –) 109-111, 224, 232-236, 240-241, 258-259, 261-266, 269-270, 276, 290-291.
Simplicidad 22, 53, 105-106, 108-109, 156, 183, 185-186, 216-219, 286-289, 299-300.
Sistema de juego 128, 132.
Tasa de apuesta (ver apuesta).
Tenacidad (reglas de –) *299-300*.
Test de hipótesis 23-24, 62, 74-78, 80-81, 81-82.
Uniformidad de la naturaleza (principio de la –) 38, 50-51, 176, 210-212, 301-302.
Uso (reglas de –) 293-300.
Valor puro (– de un juego) *84*-85.
Variable aleatoria 66, 68-70, 72-74, 81-82, 331-333.
Variedad (– de los casos de confirmación) 52, 105-106, 108-109, 171-173, 245-247, 266-267, 271-272;
(principio de la – limitada) 45-46, 175-176, *210-216*, 219-220, 223.
Verosimilitud *66*, 71-73, 91-93, 169-170;
(máxima –) 71-74, 91-93, 143-145, 236-238.
Wittgenstein (medida de –) 238-239, 258, 261-262, 272, 302-304.

INDICE DE AUTORES

Achinstein (P.) : 243, 244, 246, 335.
Agassi (J.) : 286.
Aristóteles : 29, 30.
Ayer (A. J.) : 58-59, 292, 335.
Bacon (F.) : 38, 241.
Bachelard (G.) : 11, 94, 335.
Bar-Hillel (Y.) : 253, 254, 263, 295, 335.
Barker (S.) : 335.
Bayes (T.) : 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70.
Bernouilli (J.) : 23, 67, 124, 131, 133, 143, 152, 192, 235, 241, 335.
Birkhoff (G.) : 321, 335.
Blackwell (D.) y Girshick (M. A.) : 82, 86, 335.
Boole (G.) : 69, 71, 90, 97, 122, 136, 174, 191, 200, 212, 320-327, 335.
Borel (E.) : 123, 133, 163, 168, 335.
Braithwaite (R. B.) : 16, 294, 335.
Bridgman : 277.
Broad (C.) : 40, 335.
Bross (I.) : 24, 92, 335.
Burks (A.) : 241, 303, 305, 335.
Carnap (R.) : 29, 30, 31, 34, 55, 58, 98, 101, 104, 105, 106, 111, 112, 113, 120, 181, 184, 191, 194, 222, 223-236, 239-295, 300-306, 315, 319, 335-336.
Cavailles (J.) : 26, 126, 336.
Chatalian (G.) : 107, 336.
Chrystal : 71.
Church (A.) : 134, 255, 336.
Comte (A.) : 13, 14, 15, 24, 29, 119, 120, 124, 177, 336.
Copeland (A. H.) : 24, 130, 131, 143, 336.
Cournot (A.) : 23, 35, 123-125, 130, 336.
Curry (H.) : 322, 336.
Duhem (P.) : 87, 336.
Einstein (A.) : 53.
Finetti (B. de) : 168, 199, 336.
Fisher (R. A.) : 23, 24, 63, 71-74, 88, 92, 125, 170, 336.
Frechet (M.) : 129, 133, 168, 336.
Frege (G.) :194.
Galileo (G.) : 17, 155, 167.
Gini (G.) : 125, 336.
Girshick (M. A.): cf. Blackwell (D.) y Girshick (M. A.).
Glivenko (A.) : 67.
Gödel (K.) : 53, 319.
Goodman (N.) : 34, 47-53, 59, 90, 106, 175, 181, 182, 285, 286, 288, 336.
Granger (G. G.) : 64, 336.
Halmos (P.) : 321, 325, 336.
Hannequin (A.) : 18.
Helmer (O.) : 99, 101, 235-238, 336.
Hempel (C.) : 47, 48, 52, 54-61, 146, 171, 235-238, 241, 245, 292, 295, 296, 336-337.
Hesse (M.) : 245, 237.
Hossiasson-Lindenbaum (J.) : 60, 337.
Hume (D.) : 12, 13, 17, 19, 23, 25, 68, 175, 176, 300, 301, 307, 337.
Husserl (E.) : 193, 337.
Jeffreys (H.) : 53, 106, 207, 216-219, 222, 237, 339.
Kant (E.) : 11, 17-20, 213, 337.
Katz (J.) : 178, 183-186, 300, 337.
Kemeny (J.) : 31, 53, 102, 106, 108, 185, 199, 202, 251-272, 279, 285, 296, 300, 319, 337.
Kepler (J.) : 53, 155, 167.
Keynes (J.) : 45, 70, 71, 102, 112, 176, 194, 195, 205-216, 218, 241, 279, 337.
Kneale (W.) : 214, 337.
Kolmogorov (A.) : 67, 122, 328-333, 337.
Koopman (B.) : 103, 199, 337.
Lachelier (J.) : 18-20, 337.
Lalande (A.) : 20, 337.
Laplace (P. S.) : 23, 68, 89-91, 121, 122, 123, 125, 193, 241, 272, 337.
Leblanc (R.) : 246, 337.
Lehmann (R.) : 199, 202, 337.
Leibniz (G.) : 21-23, 107, 337.
Levy (P.) : 133, 168, 337.
Lindenbaum (A.) : 324.
Mach (E.) : 15, 170.
Markov (A.) : 127, 142.
Martin (R.) : 289, 337.
Martin (R. M.) : 254, 337.
Matalon (B.) : 86, 93.
Mill (J. S.) : 13, 32, 33, 37-44, 46, 47, 48, 51, 90, 91, 176, 212, 213, 241, 337.
Mises (R. Von) : 120, 123, 125, 126, 128, 129, 130, 132, 133, 135, 136, 338.
Nagel (E.) : 157, 173, 238, 246, 248, 301, 338.
Nelson (E. J.) : 179, 338.
Neumann (J. Von) : 64, 83-85.
Newton (I.) : 18, 20, 154, 155, 156, 166, 167, 171, 172.
Neyman (J.) : 26, 69, 70, 73, 74, 76, 77, 78, 338.
Nicod (J.) : 22, 32, 39, 40, 45, 55, 205, 212-216, 338.
Oppenheim (P.) : 99, 101, 235-238, 241, 295, 296, 338.
Peirce (C. S.) : 176, 186.

Planck (M.) : 16, 338.
Poincaré (H.) : 144, 338.
Poirier (R.) : 21, 207, 209, 214, 338.
Popper (K.) : 14, 21, 53, 58, 59, 106, 170, 171, 173, 246, 286, 338.
Putnam (H.) : 287, 299, 338.
Ramsey (F.) : 197, 199, 338.
Rasiowa (H.) y Sikorski (R.) : 256, 338.
Reichenbach (H.) : 13, 15, 16, 24, 25, 26, 31, 34, 90, 99, 101, 106, 107, 111-114, 115, 119, 120, 121, 125, 126, 130, 134, 135-186, 191, 192, 237, 241, 272, 285, 286, 287, 291, 293, 301, 302, 304, 305, 306, 338.
Renyi (A.) : 67, 330, 331, 338.
Russell (B.) : 50, 161, 162, 215, 220, 238.
Savage (L.) : 197, 198, 199, 338.
Scheffler (I.) : 34, 49, 54, 59, 60, 61, 338.
Schilpp (P.) : 338.
Schlick (M.) : 247.
Shimony (A.) : 199, 202, 338.
Sikorski (R.) : cf. **Rasiowa (H.) y Sikorski (R.).**
Smirnov : 67.
Stegmüller (W.) : 260, 336.
Stone : 322, 328.
Tarski (A.) : 31, 210, 325, 338.
Turing (A.) : 134.
Venn (J.) : 71.
Ville (J.) : 127, 132, 133, 338.
Wald (A.) : 26, 64, 73, 74, 77-86, 92, 93, 94, 130, 131, 132, 133, 338.
Watanabe (S.) : 51, 52, 58, 106, 338.
Watkins (J.) : 59, 338.
Whewell (W.) : 32.
Whiteley (C.) : 60, 339.
Williams (D.) : 107, 339.
Wittgenstein (L.) : 239, 258, 261, 262, 272, 303, 304, 339.
Wright (G. H. Von) : 40, 42, 45, 55, 220, 339.
Wrinch (D.) : 53, 106, 207, 339.

OTROS LIBROS DE MATEMATICAS PUBLICADOS POR

PARANINFO S.A.

ANTONOV, VYGODSKY, NIKITIN y SANKIN.– 1.000 problemas de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría (1976).
BAJPAI, CALUS y HYSLOP.– Ecuaciones diferenciales. Texto programado (1974).
BERGTOLD.– Matemáticas para radiotécnicos (1969).
BERMAN y BEZARD.– Matemáticas para papá (2ª edición, 1975).
BOCHENSKI.– Compendio de lógica matemática (1976).
BRAY, CROXTON, MARTIN.– Análisis matricial de estructuras (1978).
BREUER.– Iniciación a la teoría de los conjuntos (1970).
CALOT.– Curso de estadística descriptiva (2ª edición, 1974).
CALUS y FAIRLEY.– Series de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales (1973).
DEMIDOVICH.– 5.000 problemas de análisis matemático (1976).
DEMIDOVICH, BARANENKOV y otros.– Problemas y ejercicios de análisis matemático (5ª edición, 1976).
DEMIDOVICH y MARON.– Cálculo numérico fundamental (1977).
DEMIDOWITSCH, MARON y SCHUWALOWA.– Métodos cifrados de análisis (en prensa).
DOMS.– La estadística ¡Qué sencilla! (3ª edición, 1976).
FADEEVA.– Métodos de cálculo de álgebra lineal (2ª edición, 1973).
FEYEL y A. DE LA PRADELLE.– Ejercicios sobre funciones analíticas (1978).
GOLSTEIN y YOUDINE.– Programación lineal. (Problemas y aplicaciones.) (1976).
HOERNES.– Introducción al álgebra de Boole (2ª edición, 1977).
LABORDE.– Tablas numéricas de funciones elementales (1966).
LABROUSSE.– Estadística, 3 tomos:
Tomo I (2ª edición, 1977).
Tomo II (2ª edición, 1976).
Tomo III (1970).
LOURENCO.– Control estadístico de calidad (1974).
LIJOLETOV y MATZKEVICH.– Problemas de matemática superior, teoría de probabilidades y de estadística matemática (1976).
MARAVALL.– Cálculo de probabilidades y procesos estocásticos (1974).
MARON.– Problemas sobre cálculo de una variable (1975).
MATHER.– Análisis estadístico en biología (1971).
MITCHELL.– Matemáticas medias para técnicos radioeléctricos (1970).
MORGAN.– Introducción a los procesos bayesianos de decisión estadística (1971).
MUELLER.– Las nuevas matemáticas en la Educación General Básica (1972).
NIXON.– Transformación de Laplace (1970).
PARZEN.– Procesos estocásticos (1972).

QUINET.– Curso elemental de matemáticas superiores, 6 tomos:
Tomo I (2ª edición, 1975).
Tomo II (2ª edición, 1974).
Tomo III (2ª edición, 1976).
Tomo IV (2ª edición, 1975).
Tomo V (2ª edición, 1978).
Tomo VI (2ª edición, 1975).

QUINET y PERRAUDEU.– Curso elemental de matemáticas superiores. (Soluciones de ejercicios a los tomos I, II y III.) (1968).

RIOS.– Algebra lineal y geometría vectorial (1975).

RIOS.– Análisis estadístico aplicado (2ª edición, 1976).

RIOS.– Matemática aplicada (1975).

RIOS.– Matemáticas C.O.U. (1978).

RIOS.– Matemáticas especiales (2ª edición, 4ª tirada, 1975).

RIOS.– Matemática finita (3ª edición, 1975).

SCHROM.– Tablas de logaritmos (1973).

SEMA.– Iniciación a la práctica de las estadísticas (1971).

SMIRNOV y OUNIN-BARKOWSKI.– Curso de cálculo de probabilidades y de estadística matemática (1978).

TROPPER.– Teoría de matrices aplicadas a la electricidad y a la electrónica (1967).

VEEN.– Introducción a la teoría de la investigación operativa (1971).

VENTSEL y OVCHAROV.– Problemas de cálculo de probabilidades (con soluciones) (1978).

WILLIAMS.– Aritmética. Texto semi-programado (1972).

ZISMAN N.– Topología algebraica elemental.

Magallanes, 25
MADRID - 15